

706-TRE-OP/CA-4609

Modelo numérico y estudio sobre los criterios  
de redistribución plástica en estructuras de  
hormigón armado

Autor: MERCEDES SONDON

Tutor: JESÚS MIGUEL BAIRÁN GARCÍA

14 de febrero de 2011



## Agradecimientos

No habría sido posible la realización de esta tesina sin el inestimable respaldo y colaboración de una serie de personas que, directa o indirectamente, han tomado parte en ella.

Agradezco especialmente a Roberto Flores, sin cuya ayuda y paciencia infinitas esta tesina no hubiera visto la luz.

Quiero dar las gracias también a mi tutor, Jesús Miguel Bairán, por guiarme con sus consejos, por el apoyo que me ha brindado, y por orientarme en la redacción del documento.

A Roberto Griñó, que ha aportado su experiencia y conocimientos de gran valía.

Por supuesto, a mi hermana y a mi hermano, por estar siempre, a pesar de enorme la distancia.

Y, finalmente, a Enrique Escolano, que ha soportado mi locura magistralmente.

A todos ustedes,

Gracias.



## Resumen

El comportamiento real de las estructuras difiere de la predicción basada en un cálculo elástico lineal desde el momento que los materiales comienzan a trabajar en régimen plástico. Ello conlleva que la ley de esfuerzos en estados límite último se aleje de la lineal elástica en una manera que depende del armado del elemento. Este fenómeno puede tenerse en cuenta durante el diseño para redistribuir los esfuerzos de cálculo de estructuras hiperestáticas si se dispone de suficiente ductilidad. Se puede así optimizar de manera más efectiva el armado en situaciones de alternancia de cargas, concentración de armaduras en apoyos, etc. En el caso de estructuras metálicas con perfiles de clase 1, el comportamiento es lo suficientemente dúctil como para pensar que la rotura final ocurrirá mediante un mecanismo de colapso. En el caso de las estructuras de hormigón armado no es así, ya que la ductilidad de la estructura es limitada y podría ocurrir una rotura local previa por insuficiente capacidad de rotación en las regiones críticas. A pesar de esta limitación, el hormigón armado puede presentar cierta redistribución en situaciones de servicio al fisurar. La reciente instrucción española de hormigón estructural (EHE-08) ha modificado los criterios de redistribución de momentos admisibles sin realizar un cálculo no-lineal de la estructura. El nuevo procedimiento de cálculo tiene en cuenta el nivel de ductilidad de las secciones críticas y el tipo de acero utilizado. En esta tesina se ha desarrollado un modelo numérico para el análisis no-lineal de estructuras de hormigón armado mediante el método de las rótulas plásticas. Posteriormente se estudiaron los criterios de redistribución de momentos de la normativa actual con el fin de determinar su idoneidad y el margen de seguridad con el que se plantean. De esta forma, se intenta potenciar el recurso de la redistribución de esfuerzos para conseguir estructuras más económicas y sostenibles.



## Abstract

The real behaviour of structures separates from the predictions of linear elasticity as soon as the materials enter the plastic regime. Therefore, the stress distribution under ultimate load differs from the linear solution in a way which depends on the characteristics on the reinforcement. This effect can be accounted for during the design stage in order to redistribute loads in statically indeterminate (overconstrained) structures as long as the material response is ductile enough. It is thus possible to better optimize reinforcements in situations of alternating loads, clustering of rebars near support points, etc. For metallic structures with Class-I cross sections there is sufficient plastic deformation capability to assume that ultimate failure takes place through a collapse mechanism. On the other hand, reinforced concrete structures show a limited ductility and can fail if they are not capable of accommodating large enough rotations at the critical areas. In spite of this limitation, reinforced concrete can show a certain level of stress redistribution in service. The new version of the Spanish Regulation for Concrete Structures (EHE-08) incorporates changes in the way bending moments can be redistributed without recourse to nonlinear analysis. The new analysis procedure takes into account the ductility of critical sections and the type of steel. In the framework of this thesis a numerical model for the nonlinear analysis of reinforced concrete structures using plastic hinges has been developed. The load redistribution criteria of the new regulation have been studied in order to assess their validity and the safety margins obtained. It is expected this work will foster adoption of the load redistribution procedure as a step towards the design of more economical and sustainable structures.





## Índice

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>Índice</b>	<b>IV</b>
<b>1. Símbolos utilizados</b>	<b>1</b>
<b>2. Introducción y Objetivos</b>	<b>3</b>
2.1. Introducción . . . . .	3
2.2. Objetivos y metodología . . . . .	5
<b>3. Estado del conocimiento</b>	<b>7</b>
3.1. Comportamiento de los materiales . . . . .	7
3.2. Normativa . . . . .	13
3.3. Métodos de Análisis Estructural . . . . .	17
3.4. Comportamiento no-lineal de secciones. . . . .	22
3.5. Rótulas Plásticas . . . . .	26
<b>4. El modelo desarrollado</b>	<b>29</b>
4.1. Métodos de cálculo . . . . .	29
4.2. Algoritmo de cálculo desarrollado . . . . .	35
<b>5. Casos de validación</b>	<b>47</b>
5.1. Viga en voladizo . . . . .	47
5.2. Viga continua de dos vanos con redistribución de momentos negativos . . . . .	52

<b>6. Casos de Estudio. Ejemplo de diseño según la instrucción de hormigón estructural EHE08</b>	<b>57</b>
6.1. Dimensionamiento con redistribución limitada . . . . .	57
6.2. Análisis del efecto del porcentaje de redistribución . . . . .	59
<b>7. Conclusiones</b>	<b>67</b>
<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>70</b>

---

## 1. Símbolos utilizados

$I$	inercia homogénea
$f_{cd}$	resistencia a compresión del hormigón
$f_{ct}$	resistencia a tracción del hormigón
$E_s$	módulo de elasticidad del acero
$E_c$	módulo de elasticidad tangente del hormigón
$\varepsilon_{cy}$	deformación plástica del hormigón
$\varepsilon_{sy}$	deformación plástica del acero
$\varepsilon_{su}$	deformación última del acero
$b$	ancho de la sección
$d$	canto útil de la sección
$x$	posición de la fibra neutra
$A_s$	área de acero traccionado
$M_{CL}$	momento en el centro luz
$M_{fis}$	momento de fisuración
$M_{pl}$	momento de plastificación
$M_u$	momento último
$M_R$	momento redistribuido
$M_{lim}$	momento límite

---

$\phi_y$	curvatura plástica
$\phi_u$	curvatura última
$\theta$	rotación nodal
$u$	vector de desplazamientos generalizado
$[K]$	matriz de rigidez
$f$	vector de cargas
$g$	vector de desequilibrio

---

## 2. Introducción y Objetivos

### 2.1. Introducción

El análisis lineal para el dimensionamiento de estructuras de hormigón armado en rotura ha sido usado tradicionalmente y asumido como válido por los proyectistas, pero este análisis discrepa claramente del comportamiento real de la estructura y del propio material, como podrá verse posteriormente.

Las ecuaciones lineales en que se basa la Teoría de la Elasticidad no pueden aplicarse a los elementos estructurales en determinados niveles de carga. Para cargas cercanas al colapso, los estados que solicitan los elementos que componen la estructura obedecen a leyes distintas, que entran dentro del campo de la plasticidad o de la elasto-plasticidad. En determinadas ocasiones es aceptable considerar que las estructuras tienen un comportamiento elástico, mientras que en otras circunstancias, un cálculo según criterios plásticos es más adecuado para problema planteado.

En el cálculo lineal, la rigidez de los elementos es función de las características geométricas de la sección transversal. El comportamiento elástico de los materiales implica que las curvaturas están relacionadas con los momentos de forma lineal. Para determinar los estados límite de servicio el cálculo lineal resulta adecuado, ya que la estructura se deforma bajo la acción de cargas relativamente alejadas de la fase última de agotamiento y el comportamiento de los materiales coincide con las hipótesis admitidas en dicho análisis. Los resultados obtenidos de este cálculo permiten el dimensionamiento de las armaduras necesarias para soportar las solicitaciones deducidas en cada sección.

El cálculo no lineal contempla el fenómeno real en el cual la posición de la fibra neutra varía con las deformaciones del hormigón y de las armaduras, y la relación momentos-curvatura deja de ser lineal. Así, el módulo de elasticidad de los materiales se supone cambiante con la tensión y el diagrama momento-

## 2.1 Introducción

---

curvatura depende de diversos parámetros como la distribución y cuantía de armaduras, la tensión aplicada, o las deformaciones remanentes de procesos de carga anteriores.

El cálculo no lineal con redistribución limitada permite determinar los esfuerzos mediante un análisis lineal y, posteriormente, incrementar o disminuir estos esfuerzos, satisfaciendo las condiciones de equilibrio. La instrucción permite una redistribución máxima sin realizar un cálculo de la capacidad de rotación de las rótulas plásticas para conseguir dicha redistribución.

El análisis plástico es aquel que está basado en un comportamiento plástico, elasto-plástico o rígido-plástico de los materiales. Debe asegurarse que la ductilidad de las secciones críticas es suficiente para garantizar la formación del mecanismo de colapso planteado en el cálculo. Según la normativa actual, el análisis plástico se podrá utilizar solo para comprobaciones de Estado Límite Último, y el método no está permitido cuando es necesario considerar efectos de segundo orden.

Si es posible asumir que se produzcan deformaciones no reversibles en las estructuras, éstas pueden proyectarse para trabajar por encima del dominio elástico, con lo que se consigue un aprovechamiento más completo de su capacidad resistente. Como muchos otros materiales, en el caso de piezas estructurales de hormigón armado, una vez superado el dominio elástico, el elemento tiene capacidad para resistir esfuerzos superiores, a pesar de sufrir deformaciones internas de carácter permanente. El dimensionamiento según criterios no lineales permite, entre otras cosas, optimizar el armado ante hipótesis de carga diferentes e incrementar la seguridad global de las estructuras hiperestáticas, además de una mejor gestión de los recursos económicos.

### 2.2. Objetivos y metodología

En el presente trabajo se realiza para llevar a cabo la comprobación de estructuras mediante el método de rótulas plásticas. El dimensionamiento estructural utilizando el análisis no lineal permite estructuras más económicas y, al mismo tiempo, dotadas de la capacidad de movimiento que permite la redistribución de esfuerzos de forma previa al colapso. Esta capacidad de redistribución depende de la capacidad de deformarse en rango no-lineal sin perder capacidad de carga; es decir, de la ductilidad.

A partir de estas consideraciones, se desarrolla un modelo numérico que permite al usuario especificar las zonas de la estructura en las que se asumirá que el comportamiento es plástico. Ya que la zona plástica en una barra tiende a localizarse alrededor de las secciones críticas, una forma simplificada de reproducir la respuesta conjunta de toda la región plástica es concentrando la rotación que tiene lugar en dicha zona en un solo punto, mediante una rótula que se activa una vez que el momento en dicho punto alcanza el momento de plastificación. Este punto se conoce como rótula plástica. Para un dimensionamiento adecuado, es necesario comprobar la capacidad de rotación de las rótulas plásticas y la posibilidad de que se alcance la rotura previa por incapacidad de deformación de las zonas inelásticas.

Para tratar de manera rigurosa el problema, se ha desarrollado un código de elementos finitos adaptado al análisis que se pretende llevar a cabo, es decir, a la comprobación de estructuras de hormigón armado dotadas de rótulas plásticas en determinadas secciones.

Se evalúan diferentes casos de estudio con el fin de determinar la eficacia del programa. Se analizará una estructura isostática, para conseguir un primer nivel de aceptación del modelo desarrollado. El segundo caso de estudio que se presentará es un caso teórico hiperestático, cuyos resultados permitirán validar la eficacia del programa de cálculo.

En última instancia, se procede al dimensionamiento de una viga continua mediante el análisis lineal con redistribución de esfuerzos, siguiendo las prescripciones de la instrucción de hormigón estructural (EHE 08). Los re-

## 2.2 Objetivos y metodología

---

sultados obtenidos se contrastan con el modelo numérico para comprobar si los valores de redistribución especificados en la normativa actual idóneos, y determinar el margen de seguridad con el que se plantean.



---

## 3. Estado del conocimiento

### 3.1. Comportamiento de los materiales

#### 3.1.1. Hormigón

##### **Comportamiento del hormigón armado frente a cargas de compresión uniaxiales**

La resistencia a compresión del hormigón se mide, generalmente, mediante el ensayo a compresión simple sobre probetas cilíndricas estandarizadas.

El comportamiento del hormigón se caracteriza por tres fases diferenciadas: una etapa inicial que puede aproximarse como lineal dentro de márgenes de error aceptable. Una etapa no lineal de tensiones incrementales, conocida como endurecimiento, caracterizada por una continua y creciente degradación de las propiedades mecánicas iniciales. Finalmente, una etapa de ablandamiento caracterizada por rigideces negativas con caída de tensiones frente a deformaciones crecientes.

Como se muestra en la figura 3.1, inicialmente se aprecia una rama lineal elástica, para valores de tensión que están por debajo del orden del 60 % de la resistencia a compresión del hormigón. A partir de este punto se inicia el proceso de microfisuración y se verifica que el comportamiento del material es no lineal. Para hormigones de resistencia mayor, se produce un aumento en el valor relativo de la tensión para la que deja de verificarse el comportamiento elástico. La tensión máxima que soporta el material es aquella a la que se producen deformaciones del 0.2 %. La deformación de tensión pico es mayor en el caso de resistencias más altas, pero el pico es más agudo, lo que manifiesta un comportamiento frágil del material. Superado el punto de tensión máxima, el hormigón puede transmitir ciertas tensiones. A mayores resistencias, la rama descendente tiene mayor pendiente y la deformación aprovechable en la rama postpico es menor.

### 3.1 Comportamiento de los materiales

---

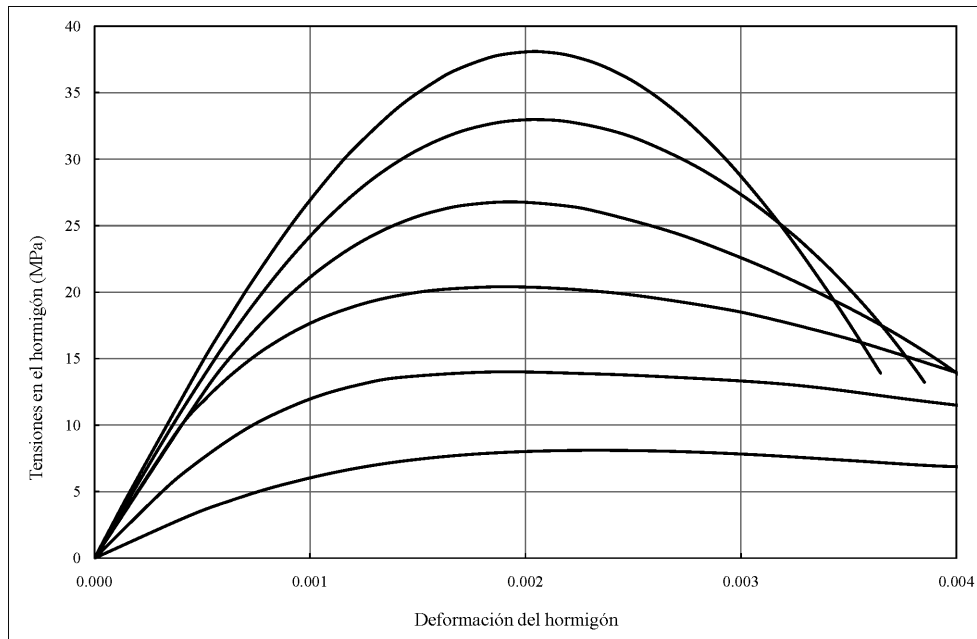


Figura 3.1: Curvas  $\sigma$ -  $\epsilon$  para hormigones de distintas resistencias

#### Comportamiento del hormigón armado frente a cargas de tracción

Los ensayos que se utilizan para determinar la resistencia a tracción son ensayos indirectos, ya que representa una gran dificultad ensayar probetas de hormigón a tracción directa. Los ensayos más habituales son el ensayo brasileño y el de flexotracción.

El hormigón posee una resistencia a tracción mucho menor que a compresión, en general inferior al 20 % de esta última.

La respuesta a tracción del hormigón es lineal hasta alcanzar la resistencia a tracción y presenta una rama post-pico bastante más frágil que el hormigón a compresión. Pero, además del reducido valor de resistencia a tracción del hormigón, ésta desaparece por completo al producirse la fisuración. Al aparecer la primera fisura, el hormigón pierde continuidad y el incremento de carga amplía el ancho de fisura, de forma que el material pierde su capacidad para absorber tracciones. La aparición de las fisuras puede deberse no

### 3.1 Comportamiento de los materiales

---

sólo a que se haya superado la resistencia a tracción del material, sino que pueden producirse fisuras por contracciones durante el fraguado, deficiencias constructivas, acciones térmicas, etc.

Por estos motivos, la resistencia a tracción no es aprovechable en estado límite último.

#### Comportamiento multiaxial

Ante compresiones en más de una dirección, la resistencia del hormigón tiende a mejorar respecto a su comportamiento uniaxial. Esta mejora depende de la relación entre las tensiones principales y de si la sollicitación se produce en dos direcciones (biaxial) o en tres (triaxial).

El comportamiento del hormigón en compresión triaxial principalmente se ha estudiado ensayando probetas cilíndricas sometidas a una presión de confinamiento lateral, en células de ensayo triaxial, dónde la presión de confinamiento se aplica alrededor del cilindro, mientras que la tensión de compresión se incrementa hasta la rotura. Si la tensión de confinamiento lateral del hormigón es igual en las dos direcciones, se llegará a graficas como las que se muestran en la figura 3.2, dónde se puede observar la influencia de la presión lateral de confinamiento.

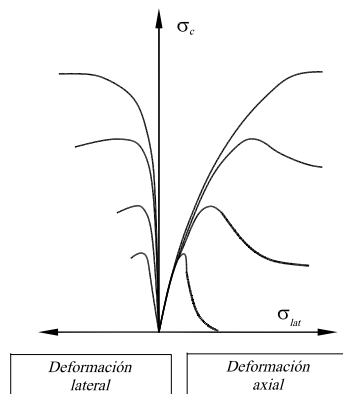


Figura 3.2: Tensión deformación para un cilindro en compresión triaxial

Otro aspecto importante que se detecta al confinar el hormigón, consiste en

### 3.1 Comportamiento de los materiales

---

un apreciable aumento de la ductilidad, pudiendo llegar a deformaciones de rotura cercanas al 10 ‰, mientras que en un hormigón sin confinar se llega al 2 ‰. Esto se traduce en una considerable capacidad de aviso antes de que se produzca el agotamiento de la sección. El hecho de que un hormigón confinado pueda alcanzar tensiones mayores que un hormigón sin confinar, se comprueba al estudiar como se propagan las fisuras en el material. Éste confinamiento suele obtenerse con armadura transversal, en forma de cercos o zunchos, o mediante planchas o telas de materiales compuestos.

#### 3.1.2. Acero

La utilización del acero en las estructuras de hormigón armado se debe principalmente a la necesidad de soportar las tensiones de tracción que puedan producirse, y por ello la colocación de armaduras es imprescindible en el caso de elementos estructurales sometidos a esfuerzos de tracción, flexión o flexo-tracción.

El acero utilizado en la construcción presenta excelentes características mecánicas, tanto a compresión como a tracción, así como una buena ductilidad. Además es importante destacar que el acero presenta un comportamiento que se aparta poco de la linealidad para tensiones inferiores al límite elástico. Tras plastificar, es capaz de soportar tensiones superiores, hasta a alcanzar la tensión de rotura.

Como se observa en la figura 3.3, se puede idealizar el comportamiento del acero mediante una rama lineal elástica hasta el punto *A*, tensión correspondiente a su límite elástico,  $f_y$ . A partir de este punto, se observa una rama plástica con pendiente cero, que tiene lugar hasta alcanzar una deformación  $\varepsilon_{sh}$  (punto *B* de la figura). Posteriormente, empieza una rama de endurecimiento por deformación, donde se alcanzan tensiones superiores, hasta que se llega al valor de resistencia máxima,  $f_s$ , con una deformación  $\varepsilon_{máx}$ . A partir del punto *C*, empieza una rama de reblandecimiento, con formación de una estricción (disminución de la sección) alrededor de una zona donde se localizan las deformaciones y donde se producirá la rotura a una deformación

### 3.1 Comportamiento de los materiales

---

permanente  $\varepsilon_{su}$ . El valor máximo de deformación aceptado por la normativa en el cálculo es del 10 por mil.

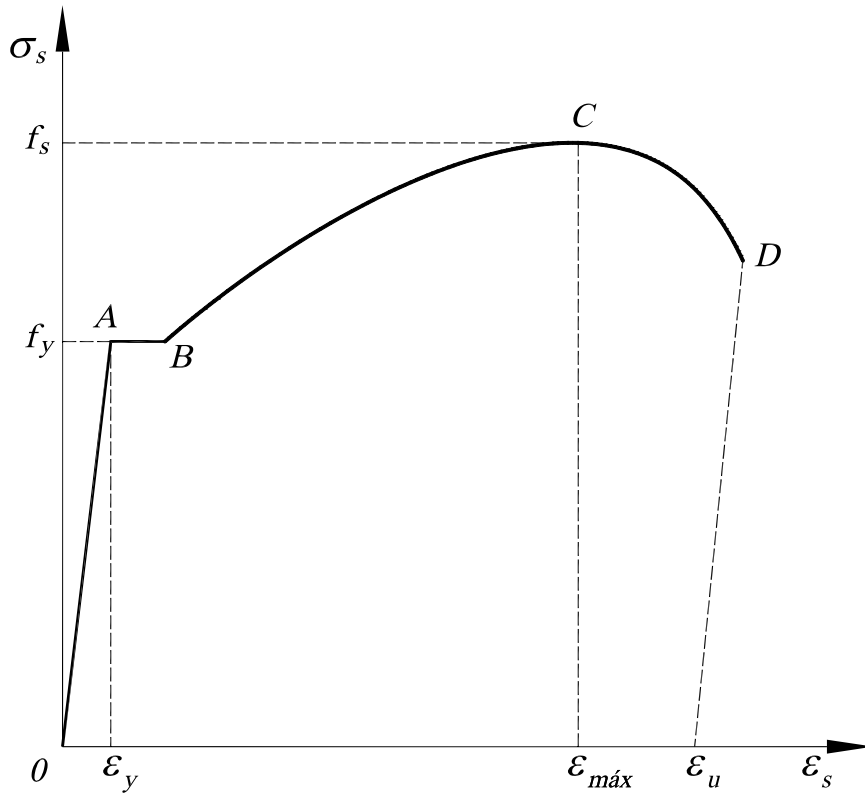


Figura 3.3: Curvas  $\sigma$ -  $\varepsilon$  para un acero dúctil

Las características de calidad del acero normalmente se obtienen mediante ensayos de resistencia a tracción, aunque se consideran también válidos los ensayo a compresión, con la diferencia de que al someter a un acero a compresión no se obtiene realmente una tensión última de rotura. Si la sección es pequeña comparada con su longitud, pueden aparecer fenómenos de inestabilidad, como pandeo, que hacen que se reduzca el valor de resistencia a compresión.

Los aceros dúctiles deben satisfacer unas características mínimas distintas según sean de categoría de Ductilidad Normal (S) o Ductilidad Especial (SD). En la Tabla (3.1) se indican los valores exigidos por la EHE 08.

### 3.1 Comportamiento de los materiales

Tipo de acero		Acero soldable		Acero soldable con características especiales de ductilidad	
Designación		B 400 S	B 500 S	B 400 SD	B 500 SD
Límite elástico, $f_y$ (N/mm <sup>2</sup> ) <sup>(1)</sup>		≥ 400	≥ 500	≥ 400	≥ 500
Carga unitaria de rotura, $f_s$ (N/mm <sup>2</sup> ) <sup>(1)</sup>		≥ 440	≥ 550	≥ 480	≥ 575
Alargamiento de rotura $\varepsilon_{u,5}$ (%)		≥ 14	≥ 12	≥ 20	≥ 16
Alargamiento total bajo carga máxima, $\varepsilon_{máx}$ (%)	acero suministrado en barra	≥ 5,0	≥ 5,0	≥ 7,5	≥ 7,5
	acero suministrado en rollo <sup>(3)</sup>	≥ 7,5	≥ 7,5	≥ 10	≥ 10
Relación $f_s/f_y$ <sup>(2)</sup>		≥ 1,05	≥ 1,05	$1,20 \leq f_s/f_y \leq 1,35$	$1,15 \leq f_s/f_y \leq 1,35$
Relación $f_y$ real / $f_y$ nominal		—	—	≤ 1,20	≤ 1,20

Cuadro 3.1: Características mecánicas de los aceros según la EHE 08

<sup>1</sup> Para el cálculo de los valores unitarios se utilizará la sección nominal.

<sup>2</sup> Relación admisible entre la carga unitaria de rotura y el límite elástico obtenidos en cada ensayo.

<sup>3</sup> En el caso de aceros corrugados procedentes de suministros en rollo, los resultados pueden verse afectados por el método de preparación de la muestra para su ensayo, que deberá hacerse conforme a lo indicado en el Anejo 23 de la norma. Considerando la incertidumbre que puede conllevar dicho procedimiento, pueden aceptarse aceros que presenten valores característicos de  $\varepsilon_{máx}$  que sean inferiores en un 0,5 % a los que recoge la tabla para estos casos.

### 3.2. Normativa

#### 3.2.1. EHE 08

Como se ha mencionado anteriormente, la normativa de hormigón estructural EHE 08, en su artículo 19.2, especifica que el análisis global de una estructura puede llevarse a cabo de acuerdo con las metodologías siguientes:

- Análisis lineal.
- Análisis no lineal.
- Análisis lineal con redistribución limitada.
- Análisis plástico.

Con relación al análisis lineal con redistribución limitada, el artículo 21 de dicha norma concreta que la magnitud de la redistribución depende del grado de ductilidad de las secciones críticas, y se establecen ciertas directrices para utilizar este método en el cálculo.

En el análisis no lineal de estructuras reticulares planas solicitadas predominantemente a flexocompresión, es suficiente la utilización de modelos basados en el uso de diagramas momento-curvatura para caracterizar el comportamiento de las secciones o los basados en el concepto de rótula plástica. Se aceptarán modelos constitutivos uniaxiales para los materiales, esto es, en los que no se tenga en cuenta la influencia de las tensiones transversales a la directriz de la pieza ni en la rigidez ni en la resistencia longitudinal.

Cuando se utiliza un análisis lineal con redistribución limitada, para vigas y placas unidireccionales continuas y para dinteles de estructuras sensiblemente intraslacionales, se admite el siguiente valor de redistribución:

$$r = 56 - 125 \frac{x}{d} \quad (3.2.1)$$

donde:

### 3.2 Normativa

---

- r      Porcentaje máximo de redistribución del momento de la sección crítica, cuyo valor no debe superar el 30 % cuando se utilizan armaduras de acero tipo SD (alta ductilidad) y 20 % para aceros tipo S (ductilidad normal).
- x      Profundidad de la fibra neutra en rotura en la sección crítica.
- d      Canto útil de la sección crítica.

Para un tramo de viga, por ejemplo, la máxima redistribución permitida consiste en sustituir el diagrama de momentos obtenido en un cálculo lineal por otro que resulta de intercambiar el eje de abscisas por una recta que pasa por valores no superiores a  $\pm r \cdot M_1$  ó  $\pm r \cdot M_2$  (ver figura 3.4). En el caso particular en que  $M_1 = M_2 = M$ , dicha redistribución equivale a desplazar verticalmente la curva teórica en un valor que no supere  $\pm r \cdot M$  (ver figura 3.5).

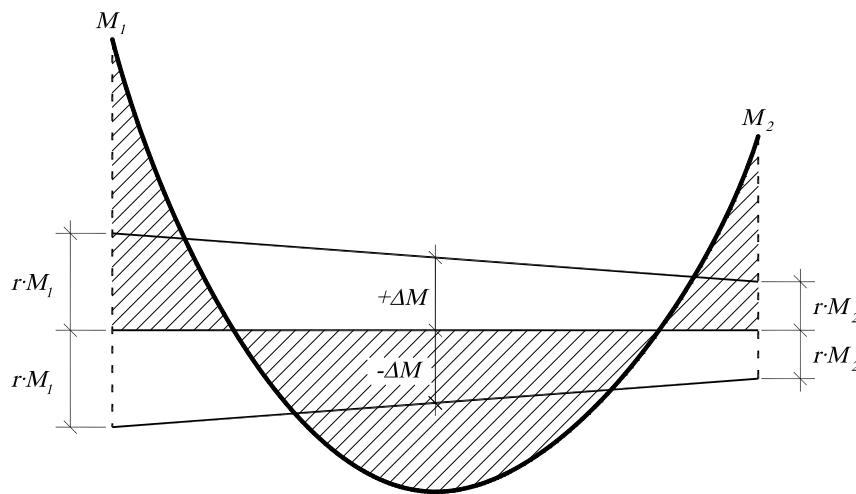


Figura 3.4: Redistribución de esfuerzos



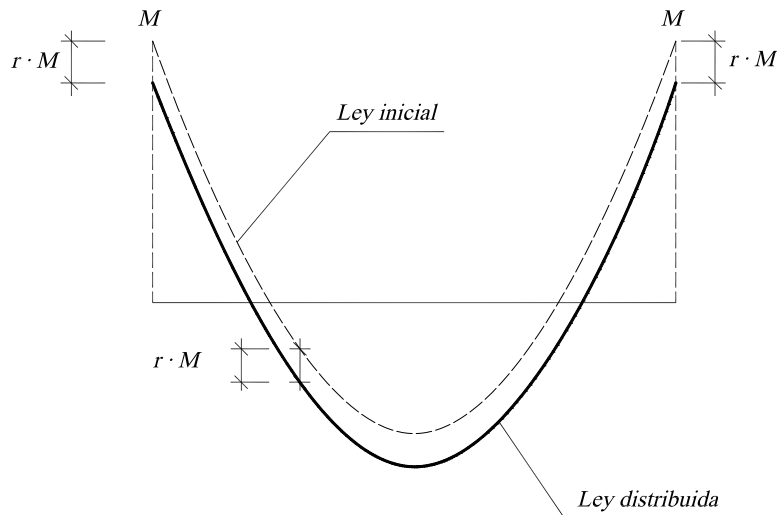


Figura 3.5: Redistribución de esfuerzos

Se tendrá en cuenta la influencia de la redistribución de momentos en todos los aspectos del cálculo: flexión, cortante, torsión, anclaje y corte de armaduras.

Para una estructura sometida a diversas hipótesis de carga deben redistribuirse esfuerzos en cada una de ellas y obtener posteriormente la envolvente.

La redistribución de esfuerzos se hace en piezas sometidas a flexión. Se redistribuyen los momentos flectores, si bien, posteriormente se debe redistribuir el resto de esfuerzos del elemento (cortantes, axiles y torsores), de manera que éste se encuentre en equilibrio bajo la acción de los esfuerzos y las cargas.

### 3.2.2. Eurocódigo 2-1-1

La redistribución de los esfuerzos se puede llevar a cabo sin necesidad de verificar previamente la capacidad de rotación plástica de las secciones críticas, y sólo en los elementos sometidos, básicamente, a flexión. El margen de redistribución permitido depende de la resistencia del hormigón, de la profundidad de la fibra neutra, de si la estructura es o no traslacional, del tipo

### 3.2 Normativa

---

de acero, (siendo mayor en los aceros de alta ductilidad), y de la deformación de rotura por flexión del hormigón,  $\varepsilon_{cu}$ . Analíticamente, siendo  $\delta$  el factor de redistribución (cociente entre los momentos redistribuido y elástico), el planteamiento es el siguiente:

- Aceros de ductilidad alta (C):

$$\delta \geq k_1 + k_2 \frac{x}{d} \geq 0,7 \quad \text{Si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$\delta \geq k_3 + k_4 \frac{x}{d} \geq 0,7 \quad \text{Si } f_{ck} > 50 \text{ MPa}$$

- Aceros de ductilidad normal (B):

$$\delta \geq k_1 + k_2 \frac{x}{d} \geq 0,8 \quad \text{Si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$\delta \geq k_3 + k_4 \frac{x}{d} \geq 0,8 \quad \text{Si } f_{ck} > 50 \text{ MPa}$$

Los valores de  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  y pueden ser diferentes de unos países a otros, aunque el Eurocódigo-2 recomienda los siguientes valores

$$k_1 = 0,44$$

$$k_2 = 1,25 \left( 0,6 + \frac{0,0014}{\varepsilon_{cu}} \right)$$

$$k_3 = 0,54$$

$$k_4 = 1,25 \left( 0,6 + \frac{0,0014}{\varepsilon_{cu}} \right)$$

La redistribución máxima permitida es del 30 % ( $0,70 \leq \delta \leq 1$ ) si se utiliza acero de ductilidad alta o normal y del 20 % ( $0,70 \leq \delta \leq 1$ ) si el acero es de ductilidad baja.

## 3.3. Métodos de Análisis Estructural

### El método de los estados límite

En el diseño estructural existe una condición fundamental que el proyectista debe tener en cuenta y en la que se basará el buen funcionamiento del diseño: debe garantizarse que la estructura será capaz de resistir -con unos niveles de seguridad aceptable-, todas las acciones que puedan solicitarla durante el período de su vida útil.

El método de los Estados Límites se basa en la adopción de unos coeficientes de seguridad, tanto para la sollicitación como para la respuesta, que permiten pasar de unos valores característicos a unos valores de diseño, fijando una probabilidad de fallo aceptable (para el colapso en estado límite último entre  $10^{-4}$  y  $10^{-7}$ , y para el fallo en servicio entre  $10^{-2}$  y  $10^{-4}$ ) cumpliéndose siempre la condición que la sollicitación no supere la respuesta ( $Sd < Rd$ ).

Se trata de aplicar métodos semiprobabilísticos, asumiendo que con la adopción de unos factores de seguridad correctos se conseguirá limitar los niveles de incertidumbre asociados a todo el proceso de ejecución de una estructura, desde su diseño hasta su construcción y puesta en funcionamiento. Se realiza un tratamiento estadístico del proceso de construcción de la estructura que permite tener en cuenta de forma simplificada la gran multitud de variables aleatorias que se ven involucradas en él (variables de sollicitación, de resistencia, de procedimientos constructivos...) y causantes de posibles incertidumbres en el nivel de seguridad.

Estas causas de inseguridad pueden clasificarse en dos tipos: causas asociadas a errores evitables en mayor o menor grado, es decir, sobre las que es posible actuar en un momento dado, como por ejemplo errores de cálculo o ejecución; y causas que no pueden corregirse mediante ninguna actuación, como son la definición de las acciones adecuadas, la propia incertidumbre del modelo de cálculo o la elección del método de análisis correcto (el que más se ajuste a la realidad).

El método semiprobabilístico parte de unas hipótesis en las que se asume

que las únicas causas de incertidumbre se originan en la aleatoriedad de las acciones y las resistencias de los materiales. Es por esto que se hace necesario determinar la fiabilidad de los modelos con los que se simula el comportamiento físico real de los fenómenos.

La selección del método de análisis estructural adecuado juega un papel importantísimo en el proceso de dimensionamiento, ya que una elección errónea puede producir resultados que se alejen del comportamiento real de la estructura.

A continuación se describen los métodos de análisis que dispone el proyectista para el diseño de las estructuras que están avalados por las normativas actuales, en particular los descritos en el la instrucción de hormigón estructural (EHE 08).

#### 3.3.1. El análisis lineal

Tal como se ha mencionado previamente, es habitual recurrir al análisis lineal para el dimensionado de estructuras de hormigón, pero este análisis se aleja del comportamiento real de la estructura y del propio material.

Este tipo de análisis está basado en la hipótesis de comportamiento elástico lineal de los materiales constituyentes y en la consideración del equilibrio en la estructura sin deformar (no hay efectos de segundo orden). Bajo esta hipótesis existe reversibilidad de las deformaciones y proporcionalidad entre la acción y la respuesta de la estructura. Sin embargo, debido a diversos fenómenos como, por ejemplo, la fisuración, el comportamiento de la estructura deja de ser lineal y presenta aspectos más complejos.

El principal inconveniente del uso de un análisis elástico lineal recae en la poca aproximación que tiene con respecto al comportamiento real de la sección: la linealidad sólo se mantiene para bajos niveles de carga (en los cuales el hormigón no ha fisurado). Una vez superada la resistencia a tracción del hormigón, la rigidez a flexión disminuye, aunque la pendiente se mantiene constante. Para niveles de carga próximos al agotamiento de la sección, la rigidez es aún menor, pudiendo tener lugar un comportamiento dúctil (si se

ha dimensionado la sección con armadura infracrítica), o un comportamiento frágil (armadura supracrítica).

Teniendo en cuenta el comportamiento real de la sección, es evidente que no puede aceptarse la hipótesis de que la pieza tendrá una rigidez constante durante todo el proceso de carga. El cálculo en estado límite último se realiza considerando la plastificación de la armadura traccionada (habiéndose superado la fase de fisura). Sin embargo, el cálculo de los esfuerzos para los que se dimensiona el armado se realiza asumiendo una inercia bruta constante (no fisurada). En la práctica, la inercia corresponde a la de la sección fisurada, y considerando la armadura que se ha dispuesto (inercia homogenizada). Esto produce variaciones en la rigidez a lo largo de la directriz de la viga que hacen que la ley de momentos en estado límite último (en estructuras hiperestáticas) se aleje de la ley elástica obtenida suponiendo una rigidez constante.

Con este tipo de análisis (lineal elástico) y el uso del método de los estados límite se diseñan estructuras, en general, ‘sobredimensionadas’ y antieconómicas, con unos márgenes de seguridad muy elevados, siendo capaz la estructura de absorber niveles de carga muy superiores a los del diseño.

Cuando el análisis que se lleva a cabo corresponde a estados límite de servicio, las estructuras se acercan más a los modelos lineales (siempre que las armaduras soporten tensiones alejadas de su límite elástico) y, por lo tanto, la normativa aborda el cálculo en servicio considerando el comportamiento lineal elástico del hormigón comprimido y del acero, despreciando la capacidad resistente a tracción del hormigón.

Para el cálculo de deformaciones se tienen en cuenta los fenómenos de fluencia y retracción del hormigón, así como las flechas instantáneas que se producen al momento de aplicación de la carga sobre las vigas. Estos fenómenos hacen evidente la no linealidad de los materiales y la imposibilidad teórica de realizar el cálculo mediante métodos lineales. Sin embargo, la instrucción recomienda métodos simplificados que permiten determinar las flechas diferidas partiendo de las ecuaciones de la elasticidad clásica.

A pesar de los inconvenientes que puedan presentar los métodos lineales,

éstos siguen siendo una herramienta eficaz ya que, en la práctica, se trata de procedimientos suficientemente sencillos y de aplicación general.

#### 3.3.2. Análisis no lineal

En el análisis no lineal se asume que en el comportamiento real de una estructura no existe proporcionalidad entre la acción y la respuesta. Podemos apreciar este comportamiento en las estructuras de hormigón armado cuando los niveles de carga son relativamente elevados, ya que en este punto no hay una relación lineal entre las tensiones y las deformaciones de los materiales constituyentes.

La no linealidad en el hormigón armado se manifiesta por el comportamiento no lineal en compresión y en tracción, y por la fisuración que tiene lugar al superarse su resistencia a tracción. Se producen, por consiguiente, variaciones en las distribuciones de rigidez y, si las estructuras son hiperestáticas, existe una reserva de energía que se traduce en forma de redistribución de esfuerzos cuando se produce el agotamiento de alguna sección. Por otra parte, en el acero, el carácter no lineal se manifiesta al alcanzar éste su límite elástico y producirse la plastificación.

En este sentido, el análisis no lineal es una herramienta de que dispone el proyectista para describir correctamente la respuesta estructural, y debe ser el método de análisis de referencia para comparar con otros métodos aproximados.

Por otro lado, utilizar este tipo de análisis implica un número de dificultades añadidas que limitan su campo de aplicación.

El principal inconveniente es la imposibilidad de aplicar el principio de superposición, por lo que no es posible tratar fácilmente los efectos producidos por diferentes hipótesis de carga. Sin embargo, un estudio de la estructura a priori e incluso un análisis previo de tipo lineal, puede mostrar las hipótesis más desfavorables y las secciones críticas.

Otra dificultad que aparece en el campo no lineal, es la necesidad de abordar el cálculo mediante métodos numéricos. Estructuras definidas con un ele-

### 3.3 Métodos de Análisis Estructural

---

vado número de elementos pueden representar grandes dificultades para su tratamiento, con un importante coste computacional.

### 3.4. Comportamiento no-lineal de secciones.

Si se considera una estructura cualquiera sobre la que se aplica una carga que se incrementa progresivamente, es posible observar que el comportamiento del hormigón presenta tres estados claramente diferenciados, representados en la figura 3.6.

- En una primera fase, el comportamiento es elástico. Las tensiones no han alcanzado el valor de resistencia a tracción del hormigón y, al no haberse producido la fisuración, la sección trabaja íntegramente. La distribución de tensiones se encuentra en el rango elástico-lineal clásico y la fibra neutra pasa por el centro de gravedad de la sección homogeneizada del hormigón y del acero.
- El segundo estado se caracteriza por la fisuración del hormigón. Tiene lugar cuando las tensiones que se producen en el punto de mayor tracción en el hormigón superan su resistencia a tracción. A medida que la fisuración se propaga, las tensiones son absorbidas por la armadura de tracción. Para que se siga cumpliendo el equilibrio de fuerzas, es necesario que la posición de la fibra neutra se desplace hacia arriba, con lo que se produce también un aumento de las tensiones en el área comprimida de hormigón.
- Una última fase tiene lugar antes de producirse el agotamiento de la sección. Puede deberse a tres causas diferentes: que el acero alcance la deformación plástica, que la deformación del hormigón sea la correspondiente a la tensión de pico, o que se produzcan ambas situaciones al mismo tiempo. Para equilibrar un incremento en el momento flector, debe aumentar el brazo mecánico de las fuerzas internas (que ya no pueden variar), por lo que el eje neutro continúa subiendo.



### 3.4 Comportamiento no-lineal de secciones.

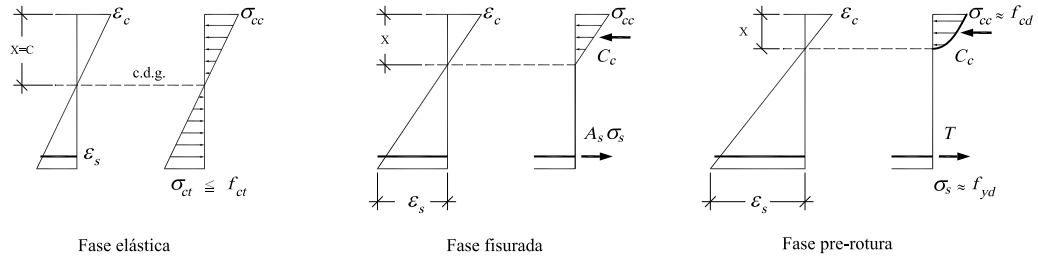


Figura 3.6: Estado de tensional en el hormigón y acero bajo carga creciente

A nivel seccional, la respuesta puede caracterizarse a partir de el diagrama momento-curvatura (ver figura 3.7) . En él se observan las tres fases descritas anteriormente.

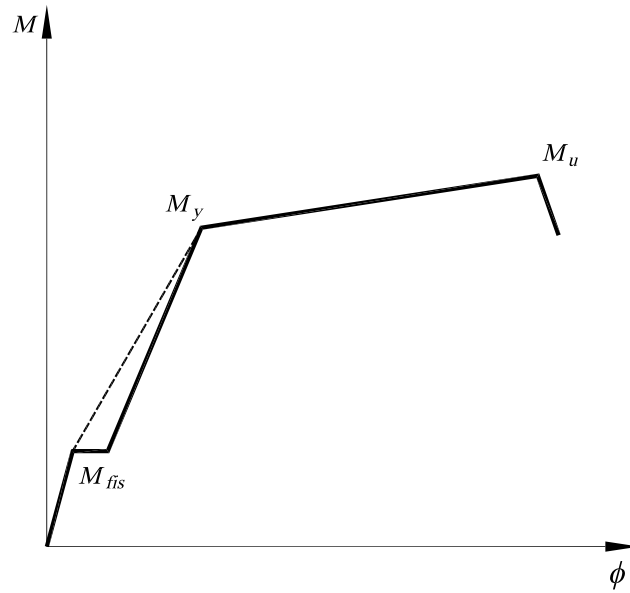


Figura 3.7: Diagrama momento-curvatura

Para esfuerzos inferiores al momento de fisuración,  $M_{fis}$ , la rigidez a flexión,  $EI$ , corresponde a la inercia de la sección bruta.

En la segunda fase, la curvatura aumento como consecuencia de la propagación de la fisura y de la caída de la rigidez. En esta fase, el elemento

### 3.4 Comportamiento no-lineal de secciones.

presenta zonas en las que la tensión es absorbida completamente por el acero (secciones fisuradas), y zonas en que el hormigón contribuye a la rigidez por la adherencia con el acero (secciones entre fisuras), como se muestra en la figura 3.8. Por lo tanto, el comportamiento medio de la pieza correspondería a la línea a trozos que se observa en la figura 3.7, hasta alcanzar el valor de plastificación,  $M_y$ .

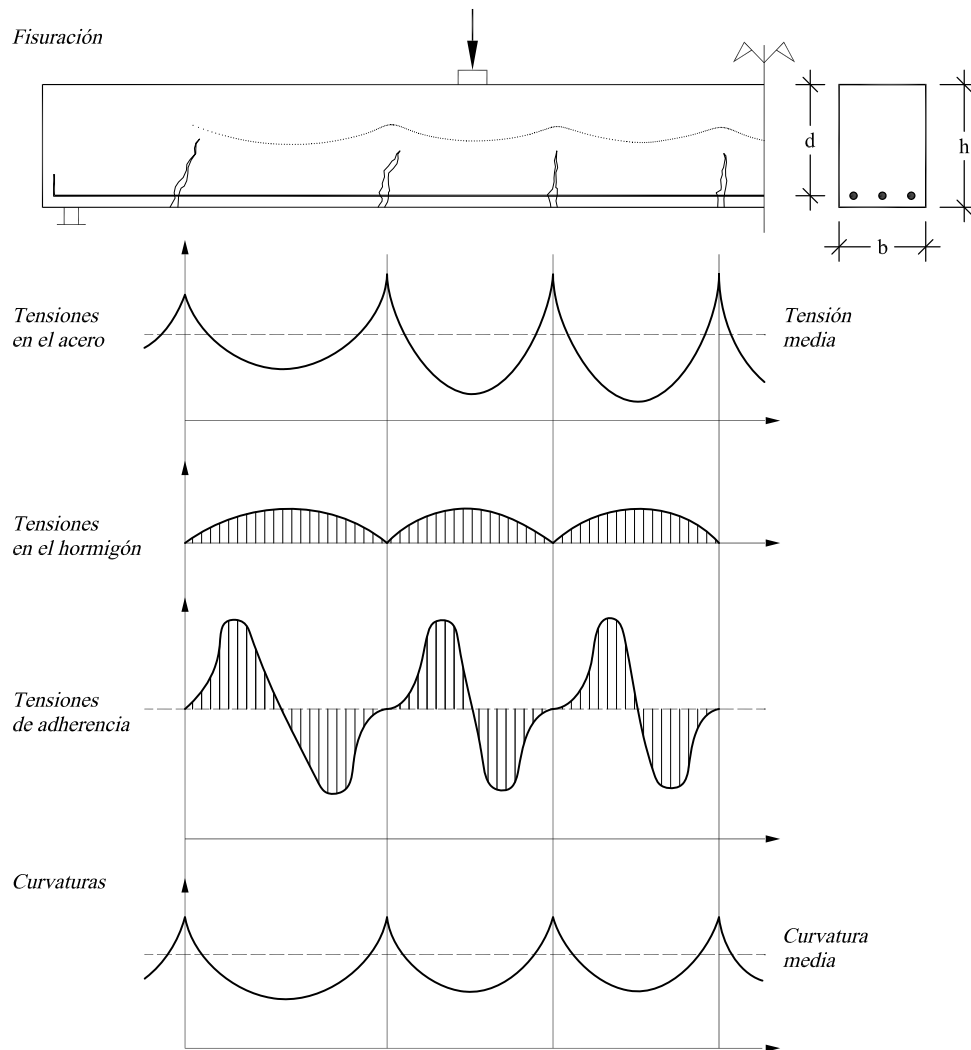


Figura 3.8: Distribución de tensiones y curvaturas en un elemento fisurado.

### 3.4 Comportamiento no-lineal de secciones.

---

En la tercera rama, la rigidez se reduce fuertemente, produciéndose un aumento importante de la curvatura para pequeños incrementos del momento flector. En esta fase, la rotura de la sección puede ser de dos tipos. Puede producirse una rotura frágil, tanto por haberse dimensionado la armadura de tracción de forma insuficiente, como por compresión excesiva del hormigón. O bien puede tener lugar una rotura dúctil, si el acero plastifica antes de que se haya alcanzado la deformación de agotamiento del hormigón,  $\varepsilon_{cu}$ .

La ductilidad de la sección es una medida de su capacidad de deformación en el rango no lineal sin que por ello se produzca una pérdida en la capacidad de carga, y se define según la ecuación (3.4.1):

$$\mu_\phi = \frac{\phi_u}{\phi_y} \quad (3.4.1)$$

donde

$\phi_u$  es la curvatura última, y

$\phi_y$  es la curvatura al inicio de la plastificación.

Si el la rotura se produce por deformación excesiva del acero de tracción, la curvatura última viene dada por:

$$\theta_u = \phi_u d = \frac{\varepsilon_{s,máx}}{1 - \frac{x}{d}} \quad (3.4.2)$$

En cambio, si la rotura se produce por compresiones excesivas del hormigón, la curvatura última puede calcularse como:

$$\theta_u = \phi_u d = \frac{\varepsilon_{cu}}{\frac{x}{d}} \quad (3.4.3)$$

### 3.5. Rótulas Plásticas

Una rótula plástica es un concepto teórico que idealiza el comportamiento de una sección de hormigón en la que la armadura de tracción ha alcanzado la plastificación y puede girar bajo incrementos de carga sin apenas aumentar el momento. La rótula plástica, situada en la sección de momento máximo, suele tener una longitud finita,  $l_p$ , y depende, entre otros factores, de:

- La forma de la ley de momentos flectores. Las rótulas plásticas abarcan una longitud mayor si disminuye el gradiente de la ley de momentos. Por esta razón, las rótulas plásticas debidas a cargas uniformemente distribuidas suelen tener mayor longitud que las correspondientes a cargas puntuales, y las que aparecen en los vanos son mayores que las de los apoyos.
- La presencia de esfuerzos cortantes concomitantes con el momento flector. El esfuerzo cortante, al provocar una inclinación de las fisuras, incrementa la tensión de la armadura principal de flexión a una cierta distancia del punto de momento máximo, aumentando con ello la plastificación en otras secciones con un momento menor que el plástico en flexión.
- El diámetro de la armadura de tracción. La pérdida de adherencia producida por los altos niveles de tensiones tangenciales tiene un efecto similar al caso anterior, extendiendo la zona plastificada a puntos adyacentes. Las barras mayores necesitan mayores longitudes de anclaje y de rótula plástica, ya que ésta última longitud aumenta con el diámetro de la barra.

Entre las expresiones empíricas para determinar la longitud plástica,  $L_p$ , puede utilizarse la siguiente, propuesta por Priestley y Paulay (1994):

$$L_p = 0,08L + 0,022f_y\phi \geq 0,44f_y\phi \quad (3.5.1)$$

donde

### 3.5 Rótulas Plásticas

---

$L$	es la longitud del elemento
$\phi$	es el diámetro menor de la armadura longitudinal principal de flexión en la zona plastificada, y
$f_y$	es el límite elástico de la armadura.

El Eurocódigo EC-2 recomienda tomar, de forma simplificada, una longitud plástica igual a 1.2 veces el canto total del elemento.

En la práctica, la longitud plástica toma valores de entre 0.75 y 1.5 veces el canto útil de la pieza.

La rotación plástica es el giro que se produce al integrar la curvatura plástica,  $\Delta\chi_p$ , entre las secciones extremas de la rótula:

$$\theta_p = \int_0^{l_p} \Delta\chi_p(x) \cdot dx \quad (3.5.2)$$

En la práctica se suele calcular la rotación plástica como:

$$\theta_p = (\phi_u - \phi_y) L_p \quad (3.5.3)$$

El efecto estructural de una rotación plástica en una estructura hiperestática es el equivalente al de una deformación impuesta. Por una parte, consideramos los desplazamientos y giros, y por otra, la aparición de los esfuerzos necesarios para que se cumpla la compatibilidad de deformaciones. En una viga continua de dos vanos iguales de luz  $L$  y sección constante, con una rigidez elástica  $EI$ , al imponer una rotación de valor  $\theta$  en un punto situado a una distancia  $x$  del apoyo extremo, los giros que se producirían libremente en los extremos de la viga serían:

$$\theta_A = \theta \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$
$$\theta_B = \theta \cdot \frac{x}{L}$$

Y para lograr la compatibilidad, debe aparecer un momento hiperestático  $\Delta M$ , cuyo valor se obtiene igualando los giros en el apoyo central:

### 3.5 Rótulas Plásticas

---

$$\theta \cdot \frac{x}{l} - \frac{\Delta M \cdot l}{3EI} = \frac{\Delta M \cdot l}{3EI} \Rightarrow \Delta M = \frac{3 \cdot EI}{2 \cdot l} \cdot \theta \cdot \frac{x}{l} \quad (3.5.4)$$

La superposición de las leyes de momentos elástica y debida a la rotación plástica da lugar a la ley de momentos redistribuida, tal como se muestra en la Fig.3.9

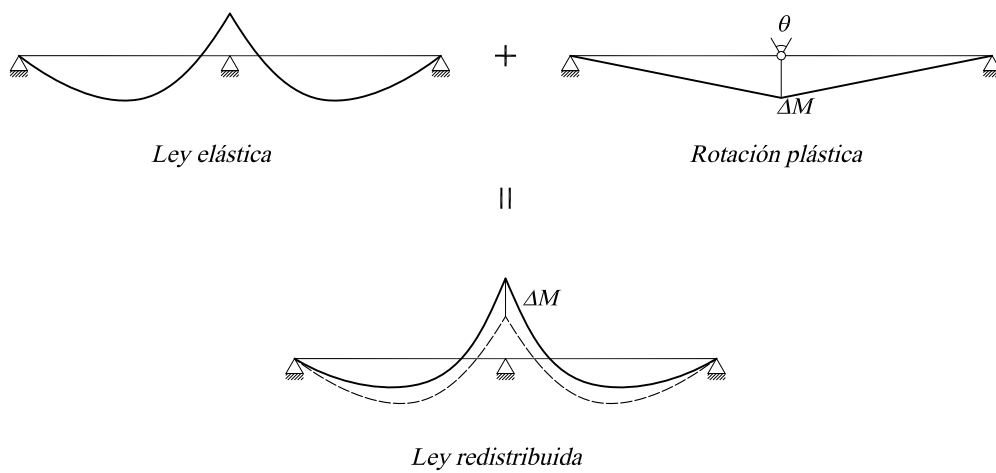


Figura 3.9: Efecto estructural de la rotación plástica

---

## 4. El modelo desarrollado

### 4.1. Métodos de cálculo

Los procedimientos generales utilizados en el análisis de estructuras de barras con comportamiento lineal se basan en la resolución de un sistema de ecuaciones en una sola etapa de cálculo. Las ecuaciones de compatibilidad establecen la relación entre las deformaciones en las barras y los desplazamientos en los nudos. Las ecuaciones constitutivas relacionan las fuerzas en los extremos de las barras con los desplazamientos nodales, e introduciendo estas relaciones en las ecuaciones de equilibrio se obtiene un conjunto de ecuaciones de fuerzas nodales en función de desplazamientos nodales.

$$f_{ext} = [K] u \quad (4.1.1)$$

La resolución de este sistema de ecuaciones permite obtener el valor de las incógnitas (desplazamientos nodales,  $u$ ), a partir de las cuales se obtienen los esfuerzos en las barras de la estructura y las reacciones.

En el caso de métodos no lineales, el cálculo es bastante más complejo, ya que se tiene en cuenta que las cargas inicialmente aplicadas afectan de modo diferente a la estructura a medida que ésta se va deformando. Las ecuaciones mencionadas anteriormente deben modificarse para incluir los efectos de esas deformaciones, así como el cambio en las características mecánicas de los materiales cuando se alejan del rango de comportamiento elástico.

Los procedimientos utilizados en cálculos no lineales de estructuras son el incremental, el iterativo, y el mixto o de Newton-Raphson.

#### 4.1.1. Método incremental

El método incremental se basa en la división de la carga generalizada total  $f_{ext}$  que solicita la estructura en  $n$  porciones  $\Delta f_{ext,j}$  (que no necesariamente deben ser iguales) y en su aplicación de manera incremental (porción a porción) hasta alcanzar el total de la carga. En cada porción de carga aplicada

#### 4.1 Métodos de cálculo

---

$\Delta f_{ext,j}$ , este método admite que el comportamiento de la estructura es lineal, tomando en la ecuación matricial de equilibrio de cada una de ellas (que permite la obtención de su vector de corrimientos generalizados  $\Delta u_j$ ), la matriz de rigidez tangente de la estructura  $[K_j]$  correspondiente a las características materiales y geométricas del inicio de cada paso  $j$  (o final del anterior,  $j - 1$ ). En definitiva, el análisis del comportamiento no lineal se reduce a la concatenación de los resultados obtenidos en el análisis de una serie de  $n$  comportamientos lineales discretos de la estructura continua. Así, el vector de carga generalizado se puede escribir como:

$$f_{ext} = f_{ext,0} + \sum_{j=1}^n \Delta f_{ext,j} \quad (4.1.2)$$

donde  $f_{ext,0}$  representa un vector de carga inicial.

Al final del paso  $i$  la carga que actúa sobre la estructura es:

$$f_{ext,i} = f_{ext,0} + \sum_{j=1}^i \Delta f_{ext,j} \quad (4.1.3)$$

y el vector de desplazamientos generalizado correspondiente:

$$u_i = u_0 + \sum_{j=1}^i \Delta u_j \quad (4.1.4)$$

donde  $u_0$  es el vector de desplazamientos inicial.

La matriz de rigidez que se emplea en cada paso  $j$  será la correspondiente al final del paso anterior, es decir, función de  $u_{j-1}$  y  $f_{ext,j-1}$ , y la correspondiente ecuación de equilibrio será:

$$\Delta F_{ext,j} = [K_{j-1}] \Delta u_j \quad (4.1.5)$$

a partir de la cual puede obtenerse  $\Delta u_j$ , invirtiendo previamente la matriz  $[K_{j-1}]$ .



A continuación se muestra una representación gráfica del método incremental.

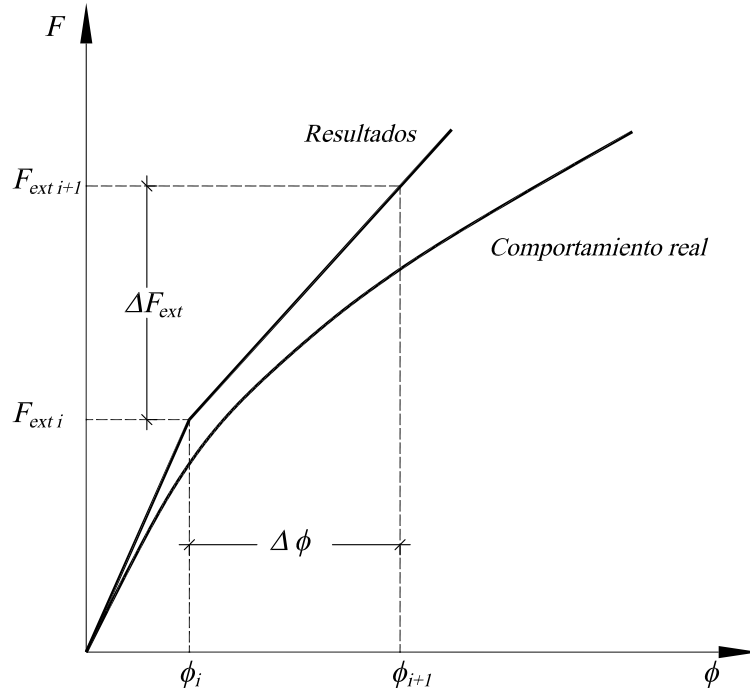


Figura 4.1: Método incremental

#### 4.1.2. Método iterativo

El método iterativo consiste en aplicar la totalidad de la carga generalizada  $f_{ext}$  a la estructura en la primera iteración del proceso de cálculo y, bajo la hipótesis numérica de que la matriz de rigidez de la estructura  $[K_0]$  es constante, determinar el vector de desplazamientos  $\Delta u_1$ , aunque no se puede garantizar el equilibrio.

La diferencia entre la carga total  $f_{ext}$  y la carga real correspondiente al desplazamiento calculado  $u_1$  es la carga no equilibrada,  $g_1$ . La nueva matriz de rigidez de la estructura  $[K_1]$  es constante dentro del siguiente intervalo de desplazamientos  $\Delta u_2$ , y su valor es el que corresponde a las característi-

## 4.1 Métodos de cálculo

---

cas elásticas y geométricas del inicio de esta segunda iteración (o final de la primera). Y así, sucesivamente, hasta que la carga a equilibrar tienda a ser nula (es decir, sea inferior a un valor de tolerancia fijado).

La carga no equilibrada  $g_{i+1}$ , correspondiente a la etapa  $i + 1$ , se determina mediante la siguiente diferencia:

$$g_{i+1} = f_{ext} - f_{int,i} \quad (4.1.6)$$

donde  $f_{ext}$  es el vector real de cargas total de la estructura, y  $f_{int,i}$  representa las fuerzas internas correspondientes al estado de desplazamientos actual,  $u_i$

$$u_i = u_0 + \sum_{j=1}^i \Delta u_j \quad (4.1.7)$$

Si  $[K_{i-1}]$  representa la matriz de rigidez de la estructura se puede escribir:

$$\Delta f_{int,i} = [K_{i-1}] \Delta u_i \quad (4.1.8)$$

teniendo en cuenta que esta matriz de rigidez es la matriz de rigidez tangente (obtenida por el ensamblaje de las matrices de rigidez tangente elementales) correspondiente a la etapa  $i - 1$ -ésima de la iteración.

A continuación se muestra una representación gráfica del procedimiento iterativo.

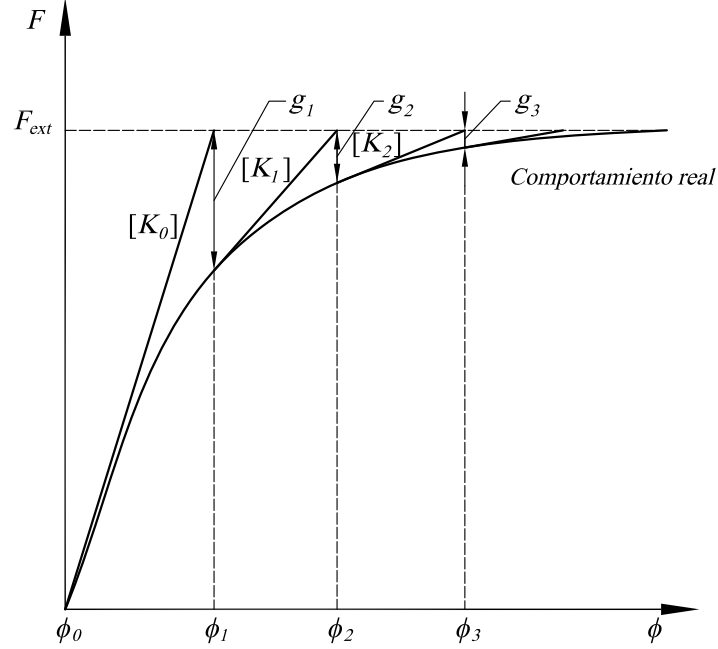


Figura 4.2: Método iterativo

#### 4.1.3. Método mixto o de Newton-Raphson

El método mixto consiste en aplicar alternativamente el método incremental y el iterativo. Así, para cada una de las partes de carga (definidas según el método incremental) en que se discretiza la estructura, es necesario iterar hasta que la diferencia entre la carga prefijada y la carga real converja (procediendo según el método iterativo), esto es, dado un estado de carga según (4.1.3), no se aplicará un nuevo incremento de carga mientras la diferencia entre la carga parcial aplicada y la carga real, (4.1.6), no sea inferior a un valor de tolerancia determinado.

Ahora  $f_{ext}$  no es un valor permanente durante todo el cálculo, sino que en cada estado de carga toma el nuevo valor  $f_{ext,i}$ . Las iteraciones necesarias dentro de cada incremento para lograr la convergencia del cálculo se realizan según se detalla en el apartado anterior, (método iterativo).

#### 4.1 Métodos de cálculo

---

El método mixto permite obtener resultados para estados de carga intermedios y proporciona resultados finales más precisos que el método incremental, aunque también presenta el inconveniente del coste computacional de actualización de la matriz de rigidez global.

A continuación se muestra una representación gráfica del método de Newton-Raphson.

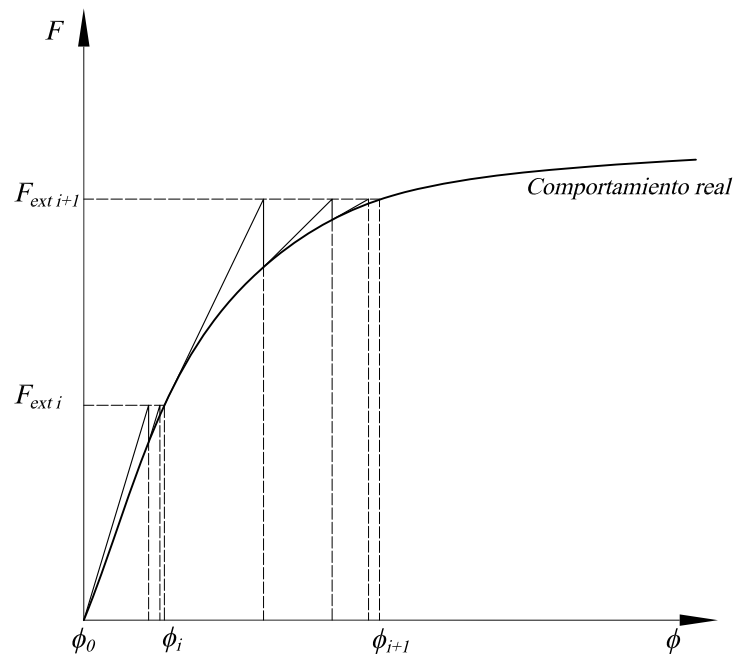


Figura 4.3: Método de Newton-Raphson

### 4.2. Algoritmo de cálculo desarrollado

El procedimiento utilizado en el análisis es el método de Newton-Raphson. Los datos de entrada necesarios para iniciar el cálculo se definen mediante un archivo que incluye información sobre la geometría, propiedades de los materiales y secciones, cargas aplicadas y parámetros de convergencia fijados.

La estructura se define mediante la especificación de las coordenadas (expresadas en un sistema global de referencia) de los nodos extremos de cada barra, y las conexiones existentes entre dichos nodos. Las barras se definen en un sistema local de referencia, identificando el número de elemento que va del nudo  $i$  al nudo  $j$  (con  $i < j$ ), y se le asignan las características geométricas, de los materiales y el armado correspondiente a cada sección.

La estructura a analizar se determina definiendo, además de las propiedades mecánicas de cada elemento tipo barra y sus conexiones, los nodos en los que se permite el comportamiento plástico. El usuario puede introducir una rótula plástica tanto en uno de los nudos fijados previamente, como en cualquiera de las barras existentes.

Por último, se definirán las condiciones de contorno, pudiendo establecerse ligaduras entre los distintos grados de libertad del sistema, e introducirse desplazamientos impuestos.

#### 4.2.1. Algoritmo básico del programa

En la primera iteración se realiza un cálculo lineal. Así se consigue un valor inicial de la variable desplazamiento global  $\delta u$  para cada elemento de la estructura.

El método matricial se basa en considerar como incógnitas del problema los giros y traslaciones nodales de la estructura, cumpliendo con el principio de compatibilidad, dado que los movimientos en los extremos de cada elemento que concurre en un nudo deben ser iguales. Los esfuerzos y reacciones de la estructura se determinan a partir de las ecuaciones de equilibrio, que se

cumplen ya que la estructura, tanto a nivel global como en cada elemento particular, debe encontrarse en equilibrio estático.

Para la resolución de la estructura, se procede al ensamblaje de la matriz de rigidez global a partir de las matrices de rigidez de cada elemento, obteniéndose entonces un sistema de  $3 \cdot n$  ecuaciones lineales (siendo  $n$  el número de nudos de la estructura) de la forma:

$$f = [K] \cdot u \quad (4.2.1)$$

donde  $f$  es el vector de cargas aplicadas,  $[K]$  representa la matriz de rigidez de la estructura, y  $u$  es el vector de desplazamientos nodales generalizados. Los pasos a seguir se describen a continuación:

1. Cálculo y ensamblaje del vector de cargas

Los tipos de carga que solicitan a la estructura pueden ser cargas puntuales, situadas en los nudos o en las vigas, o cargas uniformemente distribuidas.

Para tratar las cargas actuantes en cada elemento, la metodología seguida se basa en el principio de superposición, descomponiendo el sistema real de carga en dos situaciones que se analizan por separado. Consideremos el pórtico de la figura (4.4).

Por un lado, se consideran las cargas reales que actúan sobre la estructura, restringiendo los movimientos en los nudos (figura (4.5)). En este estado, llamado de empotramiento perfecto, cada pieza se resuelve por separado mediante procedimientos tradicionales.

Por otro lado, sobre los nudos de la estructura se aplican las reacciones obtenidas en el estado anterior, con signo contrario (figura (4.6)). Este caso de carga es el que se resolverá matricialmente.

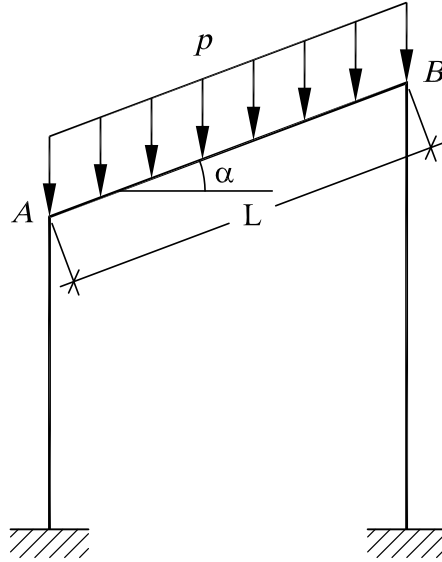


Figura 4.4: Estado real de cargas

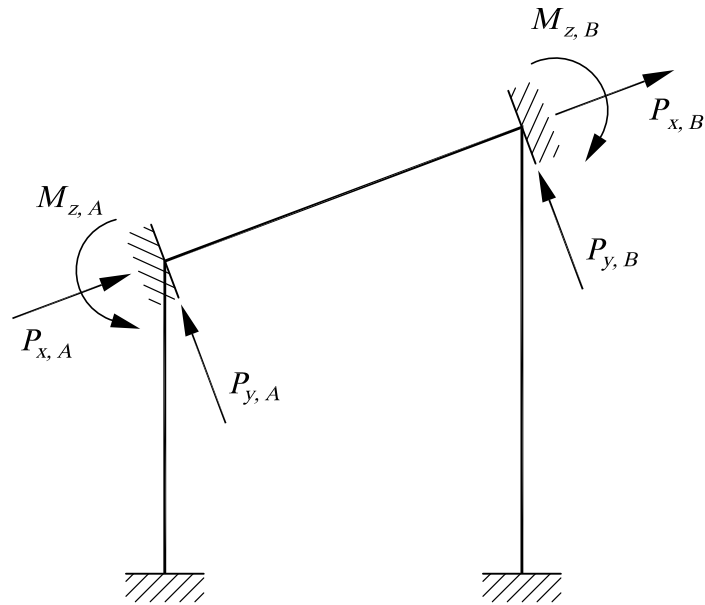


Figura 4.5: Estado de empotramiento perfecto

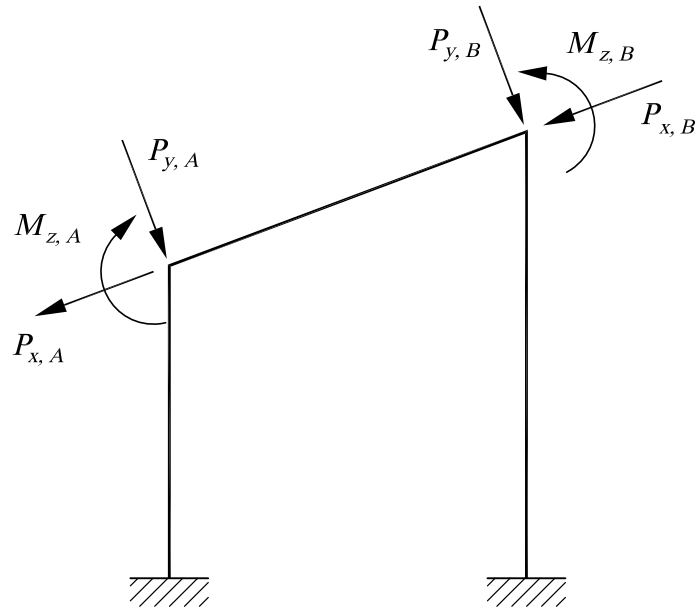


Figura 4.6: Reacciones aplicadas en los nudos

De esta forma, el cálculo se realiza considerando únicamente fuerzas y momentos aplicados en los nudos. El resultado final se obtiene aplicando el principio de superposición: los desplazamientos nodales son el resultado directo de la resolución del sistema (ya que en el primer estado los movimientos de los nudos están impedidos), mientras que los esfuerzos en las barras corresponden a la suma de los dos estados analizados.

Es necesario mencionar que la dirección en que se introducen las cargas corresponde a los ejes globales (en el caso de barras oblicuas, las componentes horizontal y vertical se determinan internamente) y, para cargas distribuidas, el valor de dichas cargas se especifica como carga por unidad de longitud.

El vector de cargas que se utilizará para resolver la estructura queda definido como:



$$f_{i(A)} = \begin{bmatrix} P_{x,A} \\ P_{y,A} \\ M_{z,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{pL}{2} \text{sen } \alpha \\ -\frac{pL}{2} \cos \alpha \\ -\frac{pL^2}{12} \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.2.2a)$$

$$f_{j(B)} = \begin{bmatrix} P_{x,B} \\ P_{y,B} \\ M_{z,B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{pL}{2} \text{sen } \alpha \\ -\frac{pL}{2} \cos \alpha \\ \frac{pL^2}{12} \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.2.2b)$$

Las cargas puntuales aplicadas en los nudos se definen de forma inmediata en el proceso de lectura del archivo de entrada.

Las cargas puntuales aplicadas en los barras, se definen especificando la distancia del punto de aplicación al nudo  $i$  (en ejes locales), y se tratan como se ha descrito anteriormente.

2. Cálculo de las matrices elementales y ensamblaje de la matriz global

Las ecuaciones elásticas de una pieza aislada pueden escribirse como:

$$f' = K' \cdot u' \quad (4.2.3)$$

donde  $f'$  es el vector de esfuerzos de la pieza,  $K'$  es la matriz de rigidez elemental (4.2.4), formada por las matrices que relacionan los esfuerzos y movimientos de cada nudo  $i, j$ , (4.2.5a) a (4.2.5d) y  $u'$  es el vector de movimientos de la barra, todos ellos expresados en el sistema local de referencia.

$$K' = \begin{bmatrix} K'_{ii} & K'_{ij} \\ K'_{ji} & K'_{jj} \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

$$K'_{ii} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI}{L^3} & +\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{L^2} & +\frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (4.2.5a)$$

$$K'_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & +\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & +\frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \quad (4.2.5b)$$

$$K'_{ji} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{L^2} & +\frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \quad (4.2.5c)$$

$$K'_{jj} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & +\frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (4.2.5d)$$

Una vez determinada la matriz de rigidez elemental, se transforma a coordenadas globales, premultiplicando cada elemento de  $K'$  por la matriz de transformación  $T$  (4.2.6), y multiplicando posteriormente por  $T^T$ .

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

Finalmente se ensambla la matriz de rigidez de la estructura,  $K$ .

Y acá hay que escribir el algoritmo de ensamblaje

### 3. Imposición de las condiciones de contorno

Las condiciones de contorno se imponen mediante el método de multiplicadores de Lagrange. El sistema se amplía a fin de incluir las ligaduras impuestas: se añade una ecuación –y una incógnita– por cada grado de libertad prescrito. El sistema modificado toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} K & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ d \end{bmatrix} \quad (4.2.7)$$

El vector  $\lambda$  introduce los multiplicadores de Lagrange, y  $d$  los desplazamientos impuestos. Las incógnitas adicionales,  $\lambda_i$ , serán proporcionales a las reacciones en los apoyos. La matriz  $A$  está formada por  $m$  filas cada una de las cuales establece una relación lineal entre los diferentes grados de libertad del sistema:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 u_{ij} A_{ij}^l + d^l = 0, \quad l = 1 \dots m \quad (4.2.8)$$

En la expresión anterior,  $u_{ij}$  representa el grado de libertad  $j$  del no-

do  $i$ , y  $A_{ij}^l$  es el respectivo coeficiente de la matriz  $A$ ; el escalar  $d^l$  es un término independiente, que aparece únicamente en ligaduras no homogéneas.

### 4. Resolución del sistema. Primera iteración

Una vez definido el sistema de acuerdo a los incisos explicados previamente (1 a 3), en la primera iteración se resuelve el sistema en rango elástico, considerando que las matrices de rigidez son constantes, y el módulo de rigidez corresponde al estado no fisurado. Así, se obtiene el vector de desplazamientos generalizado, que se utilizará para calcular el momento flector en los nudos extremos de las barras en que se ha previsto un comportamiento de rótula plástica.

### 5. Iteraciones sucesivas

Las rótulas plásticas se definen como muelles cuya rigidez se actualiza en función de las rotaciones en sus nudos extremos, más concretamente, a partir de la curvatura. La longitud de la rótula plástica utilizada es igual al canto útil, por lo que la curvatura del elemento es:

$$\phi = \frac{(\theta_j - \theta_i)}{d} \quad (4.2.9)$$

y el momento flector en los extremos de la barra se determina utilizando la curvatura calculada, según la grafica momento-curvatura, que se define para tres estados característicos (ver Figura 4.7).

Estado I: Fase de prefisuración. El hormigón aún no ha fisurado y la sección se comporta de forma lineal.

Estado II: Fase fisurada. Tanto el hormigón como el acero trabajan linealmente, produciéndose compresiones en el hormigón y tracciones por debajo del límite elástico en el acero.

Estado III: Fase de prerrotura. El acero y/o el hormigón han plastificado.

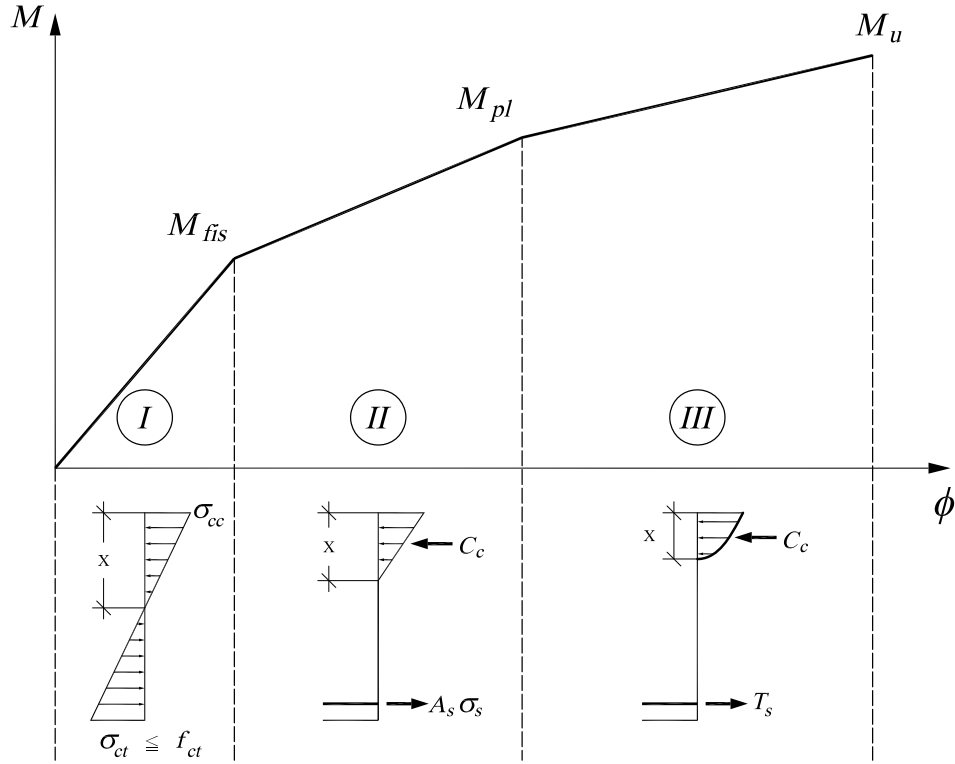


Figura 4.7: Gráfica Momento-Curvatura. Comportamiento de la sección

Los valores característicos de la curva son:

**Fisuración**

$$M_{fis} = \frac{I \cdot f_{ct}}{x} \quad (4.2.10a)$$

$$K_I = E_c \cdot I \quad (4.2.10b)$$

$$\phi_{fis} = \frac{M_{fis}}{K_I} \quad (4.2.10c)$$

**Plastificación**

$$M_{pl} = \varepsilon_y E_c A_s \left( d - \frac{x}{3} \right) \quad (4.2.11a)$$

donde

$$\varepsilon_y = \min \begin{cases} \varepsilon_{cy} = 0,0017 \cdot \frac{d-x}{x} \\ \varepsilon_{sy} = \frac{f_y}{E_s} \end{cases} \quad (4.2.11b)$$

$$K_{II} = \frac{b \cdot x^2}{2} E_c \left( d - \frac{x}{3} \right) \quad (4.2.11c)$$

$$\phi_{pl} = \frac{M_{pl}}{K_{II}} \quad (4.2.11d)$$

### ***Rotura***

$$x = \frac{1}{\lambda} \frac{A_s f_{yd}}{b f_{cd}} \quad (4.2.12a)$$

$$\phi_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} \quad (4.2.12b)$$

$$M_u = A_s f_{yd} \left( d - \frac{\lambda x}{2} \right) \quad (4.2.12c)$$

$$K_{III} = \frac{M_u}{\phi_u} \quad (4.2.12d)$$

El resultado obtenido en la primera iteración, suponiendo que la matriz de rigidez de la estructura es constante, nos da el vector de desplazamientos nodales, pero no es posible asegurar el equilibrio. Para que los nudos estén en equilibrio es necesario que las fuerzas internas y las fuerzas externas estén en equilibrio.

$$f_{int} = f_{ext} \quad (4.2.13)$$

Las fuerzas internas son las que se tienen para una posición dada, más la variación debida al desplazamiento respecto a esa configuración de referencia. Esta variación de fuerzas internas puede aproximarse como el producto de la matriz de rigidez tangente (la que contiene la rigidez de los elementos en el estado final de la iteración anterior) por el desplazamientos respecto a la configuración de referencia.

## 4.2 Algoritmo de cálculo desarrollado

---

$$f_{int,i+1} = f_{int,i} + \Delta f_{int,i} \approx f_{int,i} + [K_i] \Delta u_i \quad (4.2.14)$$

Entonces, si en un estado de deformación dado aún no se cumple el equilibrio, puede estimarse cuanto es necesario desplazarse para que la estructura se equilibre. Se tiene que:

$$f_{int,i} + [K_i] \Delta u_i = f_{ext} \quad (4.2.15)$$

Pasando el primer término de la ecuación a la derecha,

$$[K_i] \Delta u_i = f_{ext} - f_{int,i} \quad (4.2.16)$$

y llamando carga de desequilibrio,  $g_i$ , a:

$$g_i = f_{ext} - f_{int,i} \quad (4.2.17)$$

se configura el sistema que se resolverá en la siguiente iteración:

$$[K_i] \Delta u_i = g_i \quad (4.2.18)$$

y

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_{i+1} \quad (4.2.19)$$

Dado que  $[K]$  va variando según la estructura se deforma, tanto la matriz de rigidez como los esfuerzos internos se actualizan a partir del diagrama Momento-Curvatura, calculando la curvatura del elemento correspondiente a los desplazamientos nodales de la iteración previa. El sistema se resuelve sucesivamente hasta que la carga de desequilibrio tiende a ser nula, es decir, hasta que se cumplen las tolerancias prefijadas.

6. Una vez se han determinado los esfuerzos con suficiente aproximación, se incrementa la carga y se resuelve nuevamente la estructura. Se procede con este incremento de carga de forma iterativa, hasta alcanzar el momento último que resiste la sección plástica.

## 4.2 Algoritmo de cálculo desarrollado

---

A continuación se presenta un esquema del método de cálculo desarrollado (Figura 4.8).

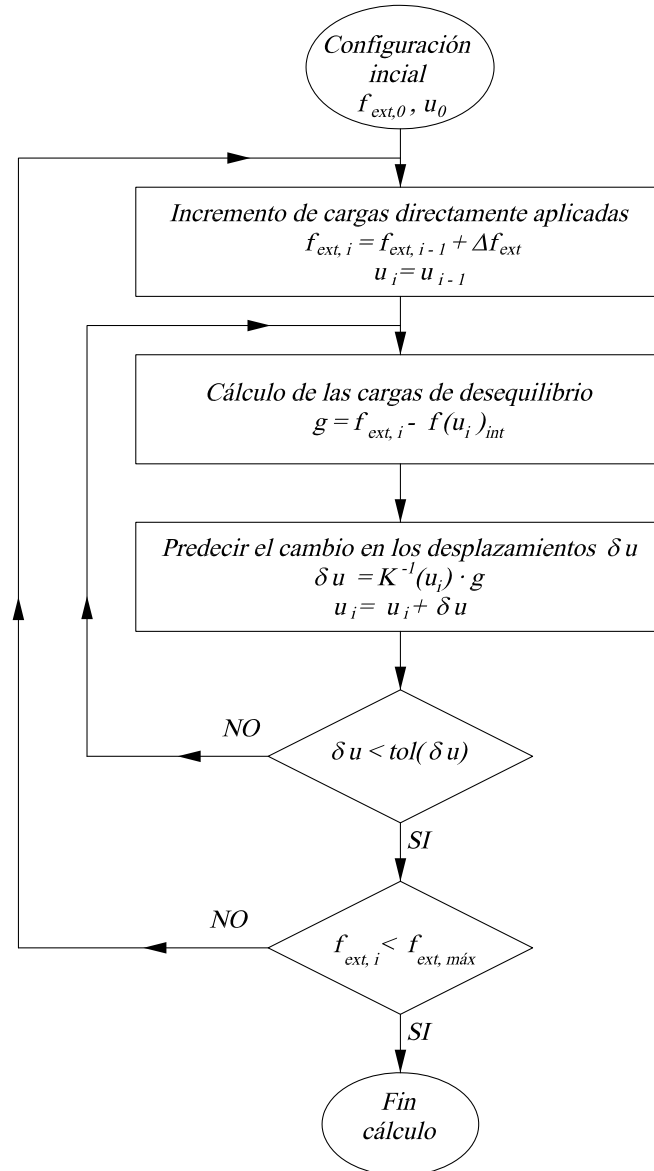


Figura 4.8: Diagrama de flujo del proceso de cálculo



---

## 5. Casos de validación

### 5.1. Viga en voladizo

Se analizará el comportamiento de una viga en voladizo de 10 m de luz y sección rectangular de 300 mm de ancho por 450 mm de canto (Figura 5.1). Las características geométricas y de los materiales son las siguientes:

$b = 300 \text{ mm}$	$f_{ck} = 30 \text{ MPa}$
$h = 450 \text{ mm}$	$f_{ctk} = 2,9 \text{ MPa}$
$d = 405 \text{ mm}$	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
$d' = 45 \text{ mm}$	$E_c = 28577 \text{ MPa}$
$L = 10 \text{ m}$	$E_s = 210000 \text{ MPa}$
$I_b = 2,28 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$	$A_s = 795 \text{ mm}^2$

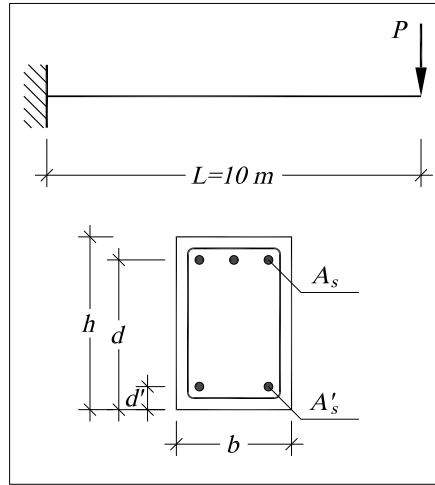


Figura 5.1: Viga en voladizo

El estudio llevado a cabo consiste en colocar una rótula plástica en el empotramiento, e incrementar la carga puntual  $P$  aplicada en el extremo libre del voladizo hasta alcanzar el valor máximo que resiste la estructura. Este incremento de carga es de 5 kN por paso, y en cada iteración se obtienen los valores de rotación en el empotramiento, y la flecha en el extremo libre. Los

## 5.1 Viga en voladizo

---

resultados se comparan con los valores teóricos de respuesta del elemento, ya que al tratarse de una estructura isostática el cálculo es inmediato.

### 5.1.1. Análisis de la curvatura

Para la sección estudiada, los valores característicos de momento y curvatura son los siguientes:

$$M_{fis} = 29,33 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad , \quad \phi_{fis} = 4,505 \cdot 10^{-4} \text{ rad/m}$$

$$M_{pl} = 147,71 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad , \quad \phi_{pl} = 8,006 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m}$$

$$M_u = 152,19 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad , \quad \phi_u = 6,340 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m}$$

A partir de estos valores se traza el diagrama Momento-Curvatura correspondiente a la estructura analizada, y sobre la misma gráfica se representan los valores calculados mediante el modelo numérico (ver figura (5.2)). Los resultados determinados con el programa (rotación en el nudo plástico) se muestran en la tabla (5.1). La curvatura en el empotramiento se obtiene según la ecuación (4.2.9).

Carga ( <i>kN</i> )	Momento ( <i>kN</i> · <i>m</i> )	Rotación ( <i>rad</i> )	Curvatura ( <i>rad</i> · <i>m</i> <sup>-1</sup> )
1.5	15	-0.00009	-0.00023
3.0	30	-0.00020	-0.00049
4.5	45	-0.00059	-0.00146
6.0	60	-0.00098	-0.00242
7.5	75	-0.00137	-0.00339
9.0	90	-0.00176	-0.00436
10.5	105	-0.00215	-0.00532
12.0	120	-0.00255	-0.00629
13.5	135	-0.00294	-0.00725
15.0	150	-0.01663	-0.04107

Cuadro 5.1: Curvatura en el empotramiento en función de la carga aplicada

## 5.1 Viga en voladizo

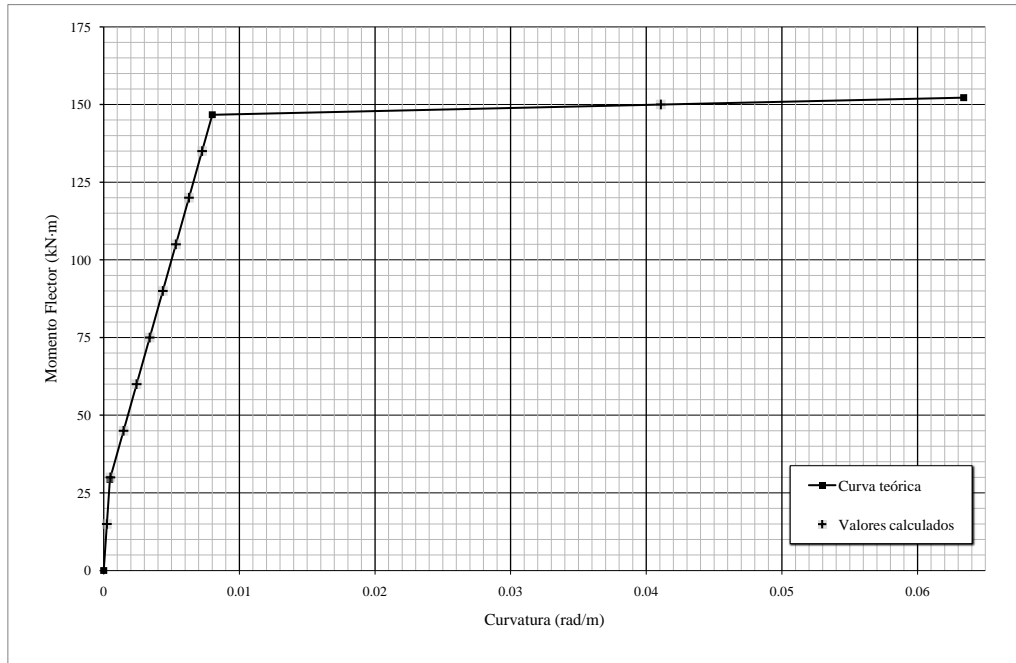


Figura 5.2: Diagrama Momento-curvatura. Viga en voladizo

La solución obtenida con el modelo coincide con la respuesta esperada de la estructura. Como se observa en la figura, en el primer paso de carga la estructura trabaja en rango elástico, ya que el momento flector en el empotramiento es inferior al momento de fisuración,  $M_{fis}$ . En los siguientes pasos, el hormigón ha fisurado, y las curvaturas están contenidas dentro del segundo tramo de la gráfica, ya que no se ha alcanzado el momento de plastificación,  $M_{pl}$ . En el último paso de carga la estructura está plastificada y la deformación aumenta considerablemente con relación al incremento de carga. Aquí se llega al agotamiento de la sección, por lo que cargas superiores a  $15,2 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , correspondiente al momento último,  $M_u$ , se producirá la rotura del elemento.

### 5.1.2. Análisis de la flecha en el extremo libre

Para comparar los resultados que se obtienen del modelo con los valores teóricos, será preciso determinar la rotación y el desplazamiento para cada una de las tres fases en que puede encontrarse la estructura.

Aplicando la teoría de vigas, puede determinarse la flecha en el extremo libre de la ménsula como la suma de dos contribuciones: la flecha producida por el giro en el empotramiento (que, recordemos, tendrá la capacidad de giro que le proporcione la rótula plástica), y la flecha debida a la flexión en la viga en comportamiento elástico (ver figura 5.3).

$$u(\theta) = \theta (L - L_p) \quad (5.1.1)$$

$$u(P) = \frac{1}{3} \frac{PL^3}{EI} \quad (5.1.2)$$

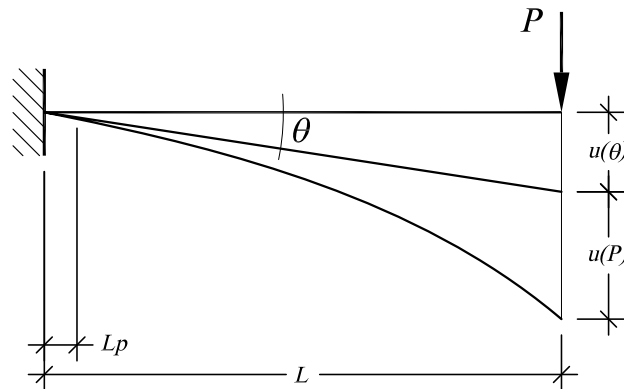


Figura 5.3: Flecha en el extremo libre del voladizo

El giro que experimenta el voladizo en la sección de la rótula se obtiene como:

$$\theta = \phi \cdot d \quad (5.1.3)$$

## 5.1 Viga en voladizo

---

En donde la curvatura,  $\phi$ , se calcula a partir del diagrama Momento-Curvatura.

En la tabla 5.2 se muestran los valores obtenidos de forma teórica y los valores calculados, así como el error con relación al valor teórico.

Los resultados obtenidos tienen un error de aproximadamente el 1%, por lo que se considera aceptable la solución que proporciona el modelo.

$P$ ( $kN$ )	$M_{flector}$ ( $kN \cdot m$ )	$\theta$ ( $rad \cdot 10^{-3}$ )	$u(\theta)$ ( $mm$ )	$u(P)$ ( $mm$ )	$u_{teórica}$ ( $mm$ )	$u_{calculada}$ ( $mm$ )	$Error$ (%)
1.50	15.0	0.09	-0.90	-7.68	-8.58	-8.62	0.52
3.00	30.0	0.20	-1.92	-15.36	-17.28	-17.40	0.70
4.50	45.0	0.59	-5.67	-23.04	-28.71	-29.00	1.00
6.00	60.0	0.98	-9.42	-30.72	-40.14	-40.50	0.89
7.50	75.0	1.37	-13.17	-38.40	-51.58	-52.10	1.02
9.00	90.0	1.76	-16.93	-46.08	-63.01	-63.70	1.10
10.50	105.0	2.16	-20.68	-53.76	-74.44	-75.30	1.15
12.00	120.0	2.55	-24.43	-61.44	-85.87	-86.90	1.20
13.50	135.0	2.94	-28.18	-69.12	-97.31	-98.50	1.23
15.00	150.0	16.70	-160.21	-76.80	-237.02	-243.00	2.52

Cuadro 5.2: Comparación entre la flecha teórica y la flecha calculada

## 5.2. Viga continua de dos vanos con redistribución de momentos negativos

En este caso se estudia una viga continua de 2 vanos de 10 m de largo cada uno, figura 5.4, sobre la que se aplica una distribuida  $q = 30 \text{ kN/m}$ .

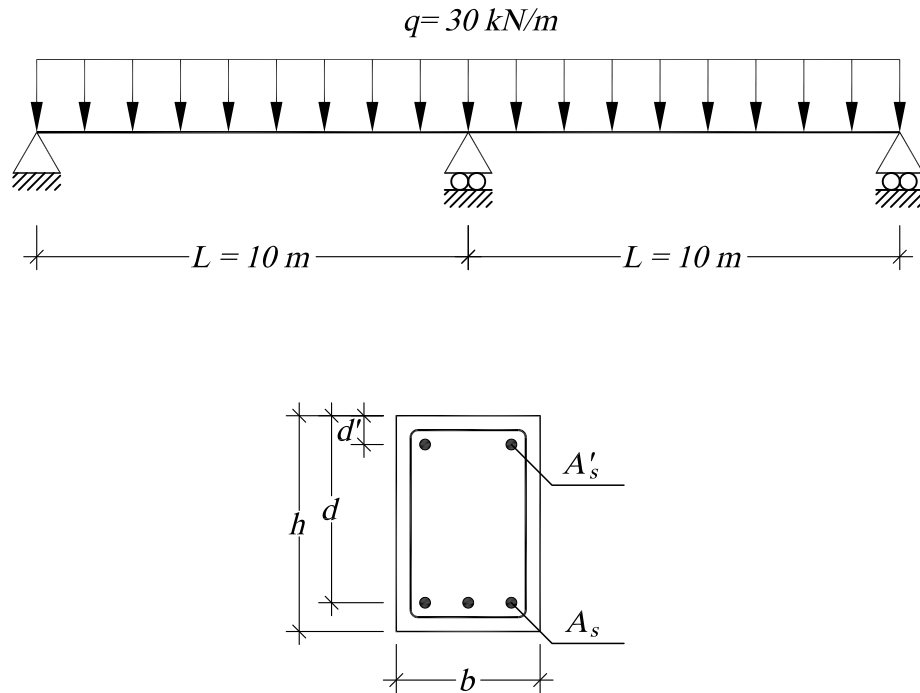


Figura 5.4: Ejemplo viga continua

Las características geométricas y de los materiales son las siguientes (tanto el armado como el canto útil corresponden a la sección del apoyo central):

$b = 300 \text{ mm}$	$f_{ck} = 30 \text{ MPa}$
$h = 500 \text{ mm}$	$f_{ctk} = 2,9 \text{ MPa}$
$d = 450 \text{ mm}$	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
$d' = 50 \text{ mm}$	$E_c = 28577 \text{ MPa}$
$L = 10 \text{ m}$	$E_s = 210000 \text{ MPa}$
$I_b = 3,125 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$	$A_s = 1296 \text{ mm}^2$

## 5.2 Viga continua de dos vanos con redistribución de momentos negativos

La figura 5.5 muestra la ley de momentos de acuerdo al análisis lineal elástico. Se observa que el momento máximo negativo ocurre en el apoyo central, con valor de  $375\text{ kN}\cdot\text{m}$ . El momento máximo en el vano es de  $210\text{ kN}\cdot\text{m}$ , y en el centro luz se produce un momento de  $187,5\text{ kN}\cdot\text{m}$ . Se considerará una redistribución del momento máximo en el apoyo del 30 % ( $112,5\text{ kN}\cdot\text{m}$ ) para que el momento final en el apoyo sea de  $262,5\text{ kN}\cdot\text{m}$ . Una vez aplicada la redistribución, el momento en el centro luz será, por condiciones de equilibrio, de  $243,75\text{ kN}\cdot\text{m}$ .

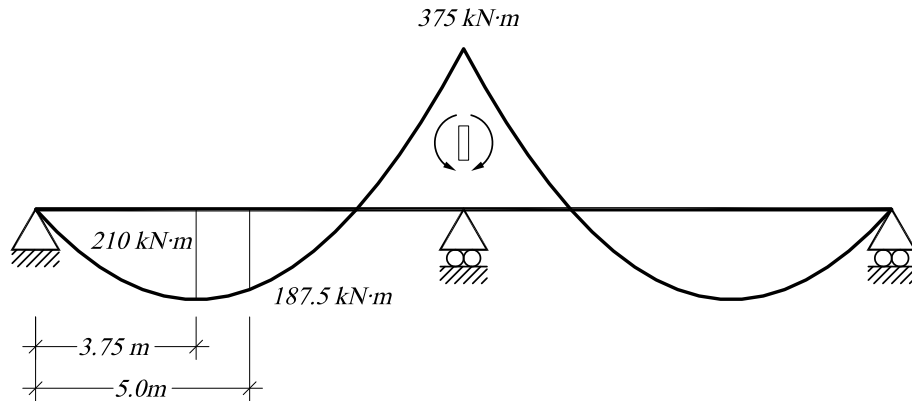


Figura 5.5: Ley de momentos elástica

Para analizar los efectos de esta redistribución de momentos, se coloca una articulación sobre el apoyo y se aplica un momento positivo de  $112,5\text{ kN}\cdot\text{m}$  a cada extremo de la rótula (figura 5.6).

El resultado de analizar esta estructura se muestra en la figura 5.7, donde se representa la ley de esfuerzos flectores que produce el momento concentrado aplicado en el apoyo central. Las rotaciones en la rótula a izquierda y derecha son, por simetría, de  $0,0042\text{ rad}$  (figura 5.8). La rotación que se produce en el apoyo central puede calcularse mediante la siguiente expresión:

$$\theta = \frac{M_R L}{3EI} = \frac{112,5\text{ kNm} \times 10\text{ m}}{3 \times 89302,5\text{ kN}\cdot\text{m}^2} = 0,0042\text{ rad}$$

## 5.2 Viga continua de dos vanos con redistribución de momentos negativos

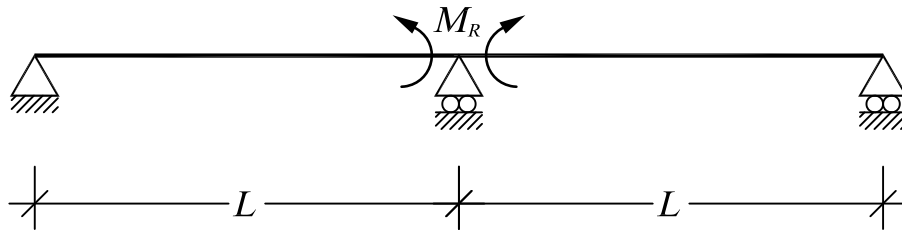


Figura 5.6: Momento a redistribuir en la estructura con articulación en el apoyo central

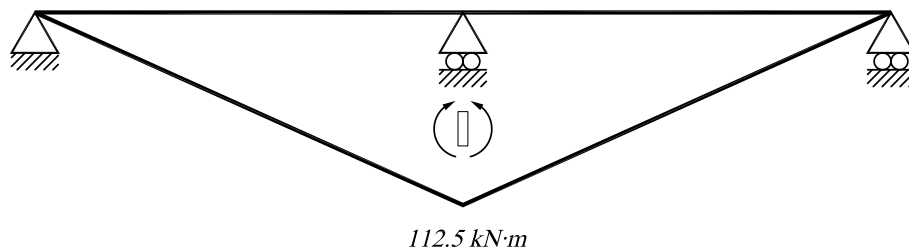


Figura 5.7: Ley de flectores en la estructura con articulación en el apoyo central



Figura 5.8: Deformada de la estructura con articulación en el apoyo central

En la figura 5.9 se muestra la ley de momentos final, una vez aplicada la redistribución. El dimensionamiento del armado se hará a partir de esta ley



## 5.2 Viga continua de dos vanos con redistribución de momentos negativos

de momentos y de forma que se garantice la rotación necesaria en la zona indicada como rótula plástica. La zona de rótula plástica debe dimensionarse tanto para la resistencia final ( $262,5 \text{ kNm}$ ) como para la ductilidad adecuada para desarrollar la deformación en rango plástico ( $0,0042 \text{ rad}$ ). El resto de la estructura solo tiene requerimiento de resistencia, por lo que no necesitará detalle de ductilidad específico.

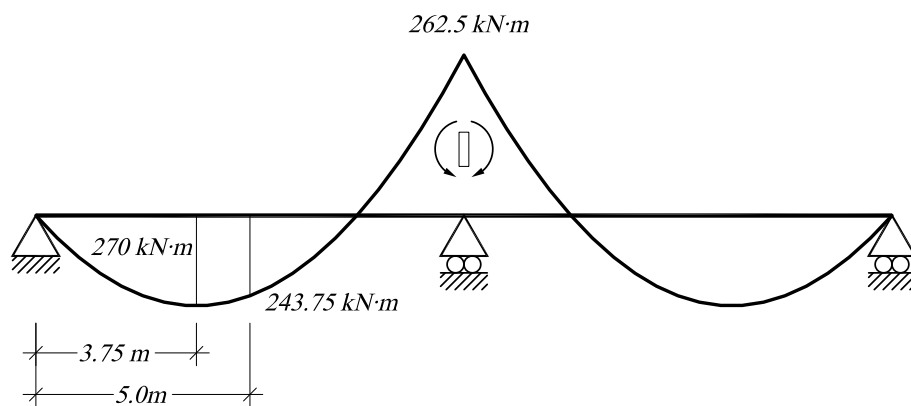


Figura 5.9: Ley de momentos flectores final

De acuerdo a los requerimientos mencionados de forma previa, se dimensiona la armadura necesaria, colocándose un área de acero de  $1269 \text{ mm}^2$  en la cara superior de la viga (esta es el área de acero estricta, sin aplicar el redondeo para obtener un número entero de barras de acero corrugado normalizadas, ya que el cálculo con el modelo numérico debe realizarse bajo las mismas condiciones para obtener resultados comparables).

Una vez dimensionada la armadura de la zona del apoyo en donde se coloca la rótula plástica, se analiza la estructura mediante el programa, obteniéndose los siguientes resultados:

## 5.2 Viga continua de dos vanos con redistribución de momentos negativos

---

	$M_{APOYO}$ ( $kNm$ )	$M_{CL}$ ( $kNm$ )	$\theta_{IZQ}$ ( $rad$ )	$\theta_{DER}$ ( $rad$ )
Valor teórico	262.50	243.75	-4.200E-03	4.200E-03
Valor calculado	263.70	243.15	-4.154E-03	4.136E-03
Error Absoluto	1.20	-0.60	4.600E-05	6.400E-05
Error relativo	0.46 %	-0.25 %	1.10 %	1.52 %

Cuadro 5.3: Comparación de resultados

A la vista de los resultados obtenidos, se puede afirmar que el error cometido está dentro del margen de lo aceptable, ya que errores de entre el 0.5 % y el 1 % son poco significativos en el cálculo de estructuras de hormigón armado. Por lo tanto, se puede aceptar como válido el modelo de cálculo desarrollado.

---

## 6. Casos de Estudio. Ejemplo de diseño según la instrucción de hormigón estructural EHE08

Como se ha mencionado anteriormente, la norma admite el cálculo elástico con redistribución limitada, estableciendo unos límites de redistribución en función del acero utilizado, del canto útil y de la fibra neutra de la sección. Recordemos que la redistribución a aplicar se relaciona con los parámetros de la sección según la ecuación (3.2.1), siendo el valor máximo de redistribución igual al 20 % o 30 %, dependiendo de si se utilizan aceros normales o de alta ductilidad, respectivamente.

Para estudiar la adecuación de la norma, se dimensionará una viga continua atendiendo a los criterios mencionados en la misma, y se estudiará el comportamiento de la estructura así dimensionada, variando el porcentaje de redistribución.

### 6.1. Dimensionamiento con redistribución limitada

La estructura a analizar es una viga continua de tres vanos iguales, de longitud igual a 10 m. La sección de la viga es rectangular, y sus dimensiones son 300 mm de ancho por 650 mm de canto, sobre la que se aplica una carga  $q = 30 \text{ kN/m}$  y una carga  $p = 20 \text{ kN/m}$  (Figura 6.1). Las características geométricas y de los materiales son las siguientes:

$b = 300 \text{ mm}$	$f_{ck} = 30 \text{ MPa}$
$h = 650 \text{ mm}$	$f_{ctk} = 2,9 \text{ MPa}$
$d = 600 \text{ mm}$	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
$d' = 50 \text{ mm}$	$E_c = 28577 \text{ MPa}$
$L = 10 \text{ m}$	$E_s = 210000 \text{ MPa}$

## 6.1 Dimensionamiento con redistribución limitada

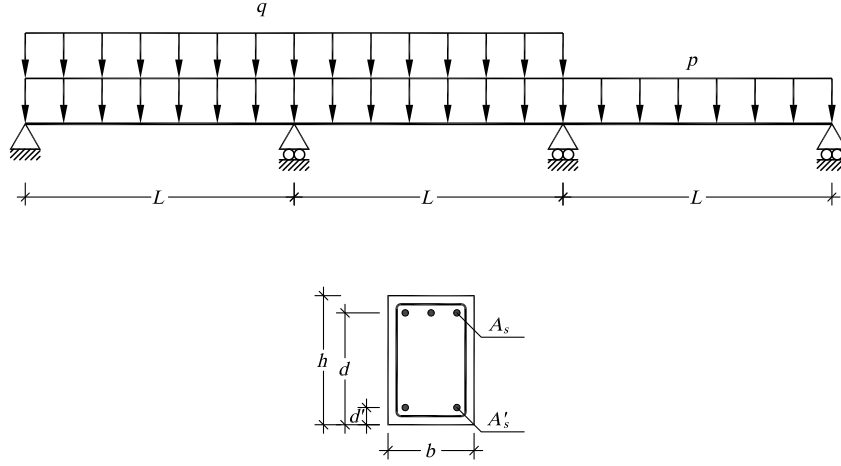


Figura 6.1: Esquema estructural.

Para dimensionar el área de acero necesaria, se considera la relación límite entre la fibra neutra y el canto útil,  $\xi_{lim} = \frac{x}{d}$ , a partir de la cual se obtiene el momento límite,  $M_{lim}$ :

$$M_{lim} = \lambda \eta \xi_{lim} f_{cd} b d^2 \left( \sqrt{1 - \frac{\lambda \xi_{lim}}{2}} \right) \quad (6.1.1)$$

La cantidad de armadura a colocar será:

$$M_R \leq M_{lim} \Rightarrow A_s = \eta \frac{f_{ck}}{f_{yk}} b d \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2M_R}{\eta f_{ck} b d^2}} \right) \quad (6.1.2)$$

$$M_R > M_{lim} \Rightarrow A_{s'} = \frac{M_R - M_{lim}}{f_{yk}(d - d')} \quad (6.1.3)$$

$$A_{s,lim} = \frac{\eta \lambda \xi_{lim} f_{ck} b d}{f_{yk}} \quad (6.1.4)$$

$$A_s = A_{s'} + A_{s,lim} \quad (6.1.5)$$

### 6.2. Análisis del efecto del porcentaje de redistribución

Para la combinación de cargas más desfavorable, de acuerdo al análisis elástico, el momento máximo tiene lugar en uno de los apoyos centrales, con un valor de  $550 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . El resultado de este análisis se muestra en la figura 6.2. Como la sección más solicitada es la del apoyo B, se aplicará a la misma una redistribución de momentos del 20 %. Es decir, se considerará en el apoyo una disminución de momentos de  $550 \text{ kN}\cdot\text{m}$  a  $440 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Para que se cumplan las condiciones de equilibrio, en el centro del vano  $AB$  el momento tomará un valor de  $405 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , en el centro del vano  $BC$  el momento tomará será de  $255 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , y en el apoyo C no se produce redistribución. En la figura 6.2 se refleja, también, la ley de flectores redistribuida una vez aplicada la reducción del momento en el apoyo.

De acuerdo al artículo 26 de la instrucción, para determinar la posición de la fibra neutra se utilizará la ecuación 3.2.1, según la que se obtiene el siguiente resultado:

$$20\% = 56 - 125 \frac{x}{600} \Rightarrow x = 173 \text{ mm}$$

A partir de este resultado se obtienen los siguientes valores de momento límite y área de acero necesaria (dado que el momento de cálculo es menor que el momento límite, sólo se colocará armadura de tracción), aplicando las ecuaciones 6.1.1 y 6.1.3:

$$M_{lim} = 702,2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$A_s = 1618 \text{ mm}^2$$

## 6.2 Análisis del efecto del porcentaje de redistribución

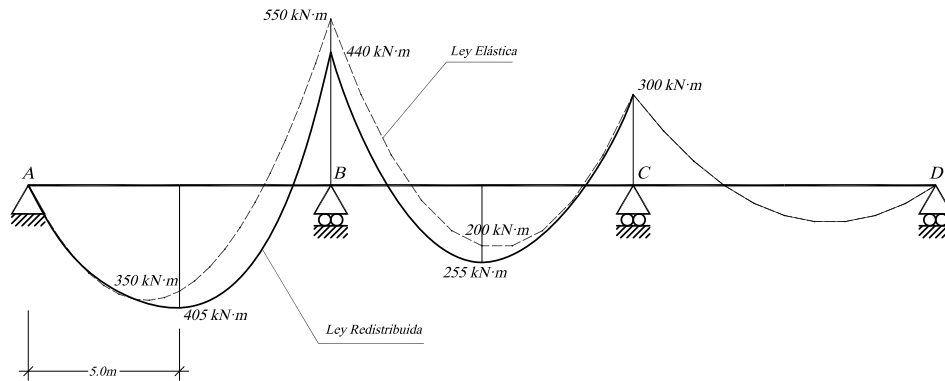


Figura 6.2: Leyes de esfuerzos flectores elástica y redistribuida.

Los resultados de la simulación con la sección recién dimensionada se reflejan en la tabla 6.1. La figura 6.3 muestra la ley de esfuerzos flectores que se obtiene mediante el modelo de elementos finitos.

	$M_{CL}^{AB}$ (kN·m)	$M_B$ (kN·m)	$M_{CL}^{BC}$ (kN·m)	$M_C$ (kN·m)
Redistribución limitada	405.00	440.00	225.00	300.00
Cálculo Plástico	406.80	436.40	242.20	329.20
Error Absoluto	-1.80	3.60	-17.20	-29.20
Error Relativo	0.44	0.82	7.10	8.87

Cuadro 6.1: Momentos calculados con una redistribución del 20 %

## 6.2 Análisis del efecto del porcentaje de redistribución

---

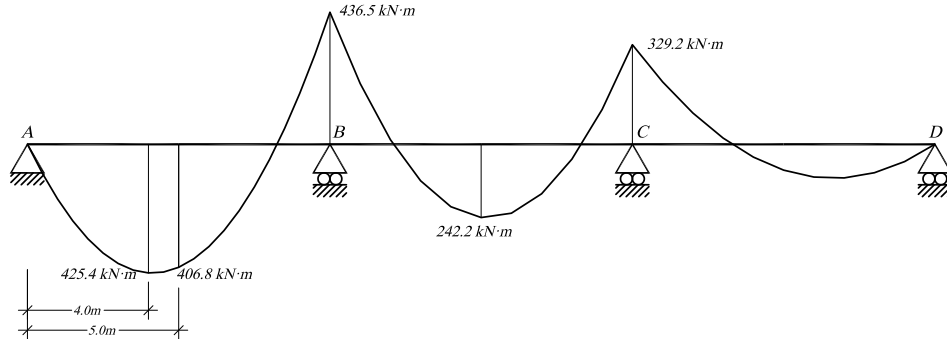


Figura 6.3: Ley de esfuerzos flectores obtenida con el programa ( $r = 20 \%$ ).

A continuación se realizarán dos cálculos similares, aplicando una redistribución del momento en el apoyo B del  $10 \%$  y del  $30 \%$ , respectivamente.

Si se desea redistribuir un  $10 \%$  del esfuerzo flector en el apoyo central, este momento redistribuido será de  $495 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , en el centro del vano  $AB$  el momento tomará un valor de  $377,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , y en el centro del vano  $BC$ , será de  $227,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .

Aplicando una redistribución del  $10 \%$ , se calcula la nueva posición de la fibra neutra y, posteriormente, se obtienen los valores de momento límite y área de acero necesaria (sólo se colocará armadura de tracción):

$$x = 125 \text{ mm}$$

$$M_{lim} = 516,2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$A_s = 1396 \text{ mm}^2$$

El resultado del análisis se muestra a continuación:

## 6.2 Análisis del efecto del porcentaje de redistribución

---

	$M_{CL}^{AB}$ ( $kN \cdot m$ )	$M_B$ ( $kN \cdot m$ )	$M_{CL}^{BC}$ ( $kN \cdot m$ )	$M_C$ ( $kN \cdot m$ )
Redistribución limitada	377.50	495.00	227.50	300.00
Cálculo Plástico	400.10	449.80	237.15	325.90
Error Absoluto	-22.60	45.20	-9.65	-25.90
Error Relativo	5.6	10.0	4.1	7.9

Cuadro 6.2: Momentos calculados con una redistribución del 10 %

Por último, se dimensionará la armadura considerando una redistribución del 30 % del momento flector en el apoyo central izquierdo. Con esta redistribución se tiene que:

$$x = 221 \text{ mm}$$

$$M_{lim} = 880,9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$A_s = 1848 \text{ mm}^2$$

Y el modelo numérico devuelve los resultados que se muestran en la tabla a continuación:

	$M_{CL}^{AB}$ ( $kN \cdot m$ )	$M_B$ ( $kN \cdot m$ )	$M_{CL}^{BC}$ ( $kN \cdot m$ )	$M_C$ ( $kN \cdot m$ )
Redistribución limitada	432.50	385.00	282.50	300.00
Cálculo Plástico	434.80	380.40	263.20	343.20
Error Absoluto	-2.30	4.60	19.30	-43.20
Error Relativo (%)	0.5	1.2	7.3	12.6

Cuadro 6.3: Momentos calculados con una redistribución del 30 %

A continuación se muestra el resultado del incremento de carga en la estructura. Se ha dimensionado la estructura considerando el armado correspondiente a una redistribución del 20 %. Sobre el vano  $CD$  se aplica una carga



## 6.2 Análisis del efecto del porcentaje de redistribución

constante  $p = 20 \text{ kN/m}$ , mientras que en el resto de la estructura se aumenta progresivamente la carga distribuida  $q$ , hasta alcanzar la rotura. Como se observa en la figura 6.4, cuando en el apoyo  $B$  se llega al momento de plasticación,  $M_{pl} = 436,3 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , esta sección no es capaz de soportar más carga, por lo que la pendiente de la curva se hace horizontal. También se aprecia como aumenta la pendiente para las secciones del centro luz del vano  $AB$  y del vano  $BC$ , que son las secciones que absorben los esfuerzos redistribuidos. En secciones más alejadas (apoyo  $C$  y centro luz del vano  $CD$ ), el efecto de la redistribución no se manifiesta prácticamente.

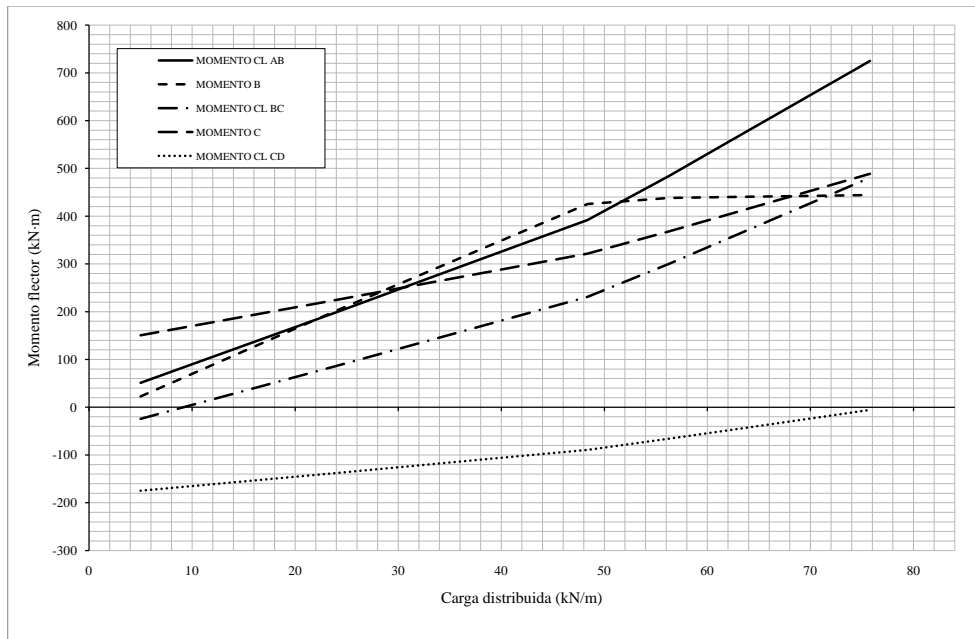


Figura 6.4: Evolución de esfuerzos flectores al incrementar la carga

Ahora se procederá a estudiar la misma estructura, colocando una rótula plástica en el apoyo  $C$ , y analizando el efecto de considerar diferentes porcentajes de redistribución. Las cuantías de acero necesarias en los apoyos  $B$  y  $C$  son las que se reflejan en la tabla 6.4, y los resultados del análisis se expresan en las tablas 6.5 a 6.7:

## 6.2 Análisis del efecto del porcentaje de redistribución

	Apoyo B $A_s$ ( $mm^2$ )	Apoyo C $A_s$ ( $mm^2$ )
Redistribución del 10 %	1848	953
Redistribución del 20 %	1618	841
Redistribución del 30 %	1396	731

Cuadro 6.4: Área de acero a tracción para diversas redistribuciones

	$M_{CL}^{AB}$ ( $kN \cdot m$ )	$M_B$ ( $kN \cdot m$ )	$M_{CL}^{BC}$ ( $kN \cdot m$ )	$M_C$ ( $kN \cdot m$ )
Redistribución limitada	377.50	495.00	242.50	270.00
Cálculo Plástico	391.25	467.5	271.8	238.9
Error Absoluto	-13.75	27.50	-29.30	31.10
Error Relativo (%)	3.5	5.9	10.8	13.0

Cuadro 6.5: Momentos calculados con una redistribución del 10 %

	$M_{CL}^{AB}$ ( $kN \cdot m$ )	$M_B$ ( $kN \cdot m$ )	$M_{CL}^{BC}$ ( $kN \cdot m$ )	$M_C$ ( $kN \cdot m$ )
Redistribución limitada	405.00	440.00	285.00	240.00
Cálculo Plástico	406.45	437.10	289.95	233.00
Error Absoluto	-1.45	2.90	-4.95	7.00
Error Relativo (%)	0.4	0.7	1.7	3.0

Cuadro 6.6: Momentos calculados con una redistribución del 20 %

	$M_{CL}^{AB}$ ( $kN \cdot m$ )	$M_B$ ( $kN \cdot m$ )	$M_{CL}^{BC}$ ( $kN \cdot m$ )	$M_C$ ( $kN \cdot m$ )
Redistribución limitada	432.50	385.00	327.50	210.00
Cálculo Plástico	434.40	381.20	332.48	203.85
Error Absoluto	-1.90	3.80	-4.98	6.15
Error Relativo (%)	0.4	1.0	1.5	3.0

Cuadro 6.7: Momentos calculados con una redistribución del 30 %

Procediendo de forma análoga al caso anterior, se muestra el resultado del incremento de carga en la estructura. Se ha dimensionado la estructura considerando el armado correspondiente a una redistribución del 20 %, colocando

## 6.2 Análisis del efecto del porcentaje de redistribución

un área de acero  $A_s = 1618 \text{ mm}^2$  en el apoyo  $B$  y  $A_s = 841 \text{ mm}^2$  en el apoyo  $C$ . Sobre el vano  $CD$  se aplica una carga constante  $p = 20 \text{ kN/m}$ , mientras que en el resto de la estructura se aumenta progresivamente la carga distribuida  $q$ , hasta alcanzar la rotura de la sección del apoyo  $B$ . Los resultados son similares a los obtenidos en el caso de una sola rótula. Cuando en el apoyo  $B$  se llega al momento de plastificación,  $M_{pl} = 436,3 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , la sección no es capaz de soportar más carga, y la pendiente de la curva se hace horizontal (ver figura 6.5). También se aprecia como aumenta la pendiente para las secciones del centro luz del vano  $AB$  y del vano  $BC$ , que son las secciones que absorben los esfuerzos redistribuidos. En secciones más alejadas (apoyo  $C$  y centro luz del vano  $CD$ ), el efecto de la redistribución no se manifiesta prácticamente, a pesar de producirse la plastificación en el apoyo  $C$ .

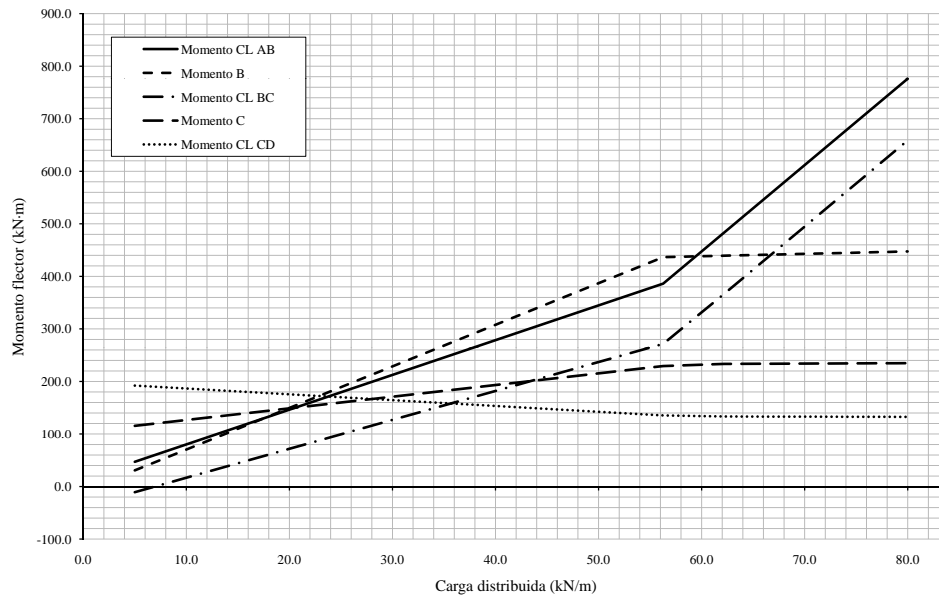


Figura 6.5: Evolución de esfuerzos flectores al incrementar la carga

## 6.2 Análisis del efecto del porcentaje de redistribución

---

Los anteriores resultados permiten hacer una serie de análisis. En primer lugar, se observa que para porcentajes bajos de redistribución, del orden del 10 %, el error cometido en el cálculo, en general, es mayor para todas las secciones de la viga. Por otra parte, aquí se obtienen momentos flectores superiores a los que se han utilizado en el dimensionamiento, por lo que se estaría del lado de la inseguridad.

Al ir incrementando el factor de redistribución, se aprecia que los valores de momento calculados en la sección plástica se acercan más al valor estimado según la instrucción. Con redistribuciones del 20 % al 30 %, el error en la sección más solicitada está entre el 0.8 % y el 1.2 %, mientras que en los restantes puntos no aumenta significativamente. Aún así, se puede ver que la sección que mayores dificultades presenta es la del apoyo C, ya que en todos los casos resulta infradimensionada.

Estudiando los resultados de la estructura con dos rótulas plásticas, y comparándolos con el primer caso, se observa un comportamiento similar en cuanto al hecho de que valores más altos de redistribución, ofrecen una solución con errores menores, y aproximándose en todas las secciones al momento flector en función del cual se ha dimensionado. En el último caso (colocando dos rótulas) la sección que se dimensiona por debajo de los requerimientos de resistencia es la del centro luz del vano AB.

---

## 7. Conclusiones

En el cálculo plástico tradicional, se procede a incrementar la carga paulatinamente, y verificar en qué secciones se alcanzan los valores de plastificación. Cuando una sección no es capaz de absorber más carga, la estructura se “redefine”, considerando que en ese punto existe una articulación. Al redistribuirse los esfuerzos conforme aumenta la sollicitación se van detectando de forma secuencial los puntos en los que la estructura plastifica hasta alcanzar la carga de rotura.

En esta tesina, se ha llevado a cabo un estudio del comportamiento según los criterios de redistribución de momentos conforme a la EHE 08. Éstos permiten dimensionar la estructura sin recurrir al cálculo no-lineal. Dado que las secciones donde se producirá la plastificación son elegidas a priori por el proyectista, existe una diferencia conceptual importante respecto al método de análisis plástico tradicional. No puede garantizarse que los puntos en los que se forman las rótulas plásticas en la estructura real coincidan con aquellos elegidos de antemano en el diseño.

Con el objetivo de disponer de una herramienta que permita corroborar las predicciones de la norma, se ha desarrollado un modelo de elementos finitos para el estudio del fenómeno de redistribución. El programa se ha diseñado de acuerdo a las especificaciones de la instrucción de hormigón estructural en lo que respecta al comportamiento de los materiales. Se ha caracterizado la respuesta de las secciones mediante un diagrama momento-curvatura trilineal. De esta forma se tiene en cuenta la pérdida de rigidez en aquellos puntos que el usuario haya definido como susceptibles de plastificar. Puede así observarse la evolución de los esfuerzos en las secciones de interés de la estructura a medida que la carga aumenta.

A fin de validar los resultados del algoritmo de cálculo desarrollado, se han estudiado configuraciones para las que se dispone de una solución teórica. Los valores obtenidos permiten afirmar que la precisión del modelo numérico es completamente satisfactoria de acuerdo con los requisitos del estudio que se ha llevado a cabo.

---

El diseño de la estructura, presuponiendo que plastifica en una sección dada, requiere la colocación de un área de acero que dote a la misma de suficiente ductilidad. Asimismo, es preciso garantizar que los momentos redistribuidos teóricos pueden resistirse. La norma impone un límite máximo a la redistribución admisible en función del tipo de acero empleado. A fin de tener en cuenta este factor, el dimensionamiento de las diferentes estructuras analizadas se ha llevado a cabo para varios porcentajes distintos de redistribución. Las estructuras dimensionadas mediante los criterios de la norma se han vuelto a analizar mediante el modelo de elementos finitos. De esta manera se puede verificar la adecuación de los resultados predichos por la norma así como detectar posible discrepancias.

Para las estructuras y casos de carga estudiados, puede decirse que, con bajos porcentajes de redistribución, el resultado previsto por la norma se aleja apreciablemente del comportamiento real. Además, la redistribución de esfuerzos que se produce es mayor que la supuesta en el dimensionamiento. Esto implica que determinadas secciones (aquellas que plastifican) pueden resistir cargas mayores que aquellas a las que realmente se encuentran sometidas. Por el contrario, en otros puntos de la estructura el área de acero que se ha dispuesto se encuentra por debajo de los requerimientos de resistencia correspondientes al análisis lineal. Recordemos, sin embargo, que el dimensionamiento se ha llevado a cabo con valores de resistencia característicos (sin mayorar). Por tanto, el resultado del momento flector sólo refleja una disminución de los factores de seguridad y no debe interpretarse como un indicador de la posibilidad de fallo prematuro.

Al aumentar el porcentaje de redistribución hasta valores próximos al máximo permitido se aprecia que las discrepancias en los valores del momento flector predichos se reducen notablemente. El resultado del análisis simplificado basado en la norma se aproxima en gran medida al modelo no-lineal de elementos finitos. Por otra parte, el criterio de redistribución aplicado puede conducir a errores, dado que requiere ser capaz de predecir el comportamiento estructural más allá del rango lineal. Determinar en qué puntos se producirá la plastificación de la estructura requiere de habilidad y experien-

---

cia por parte de quien diseña el elemento. En este sentido, se puede afirmar que el acierto del proyectista a la hora de elegir las secciones en que se desea redistribuir el momento puede tener efecto muy importante en el resultado final. La respuesta de la estructura se hace más compleja al tener en cuenta un mayor número de efectos no-lineales (rótulas plásticas, en el caso que no ocupa). Puede concluirse que, para obtener el máximo beneficio posible de la aplicación de los criterios de redistribución, el proyectista debe contar con una dilatada experiencia en este tipo de análisis. Más allá de la dificultad de aplicación inherente, considerar la capacidad de redistribución de esfuerzos puede conducir al diseño de estructuras en las que se aprovechen en mayor medida los materiales. En definitiva, permite la obtención de ventajas económicas sustanciales, sin dejar en ningún momento de garantizar un nivel de seguridad adecuado.





## Referencias

- [1] Bairán, JM.; Marí, A.(2007), “Proyecto de estructuras de hormigón armado con armaduras de alta ductilidad”.
- [2] EHE (08), “Instrucción de hormigón estructural”, Ministerio de Fomento, Madrid.
- [3] EC2 (2002), “Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1”, Brussels.
- [4] Nilson, A., Winter, G. (1995), “Diseño de estructuras de concreto”, McGraw-Hill, 11<sup>a</sup> Ed., México.
- [5] Park, R. Paulay (1994), T., “Estructuras de concreto reforzado”, Ed. Limusa, México.
- [6] Murcia, J., Aguado, A., Marí, A. (1993), “Hormigón armado y pretensado - I”, Edicions UPC.
- [7] Cervera, M., Blanco, E. (2002), “Mecánica de estructuras. Libro 2. Métodos de análisis”, Edicions UPC.